TEORIIA VEROIATNOSTEI I EE PRIMENENIIA

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ III
ВЫПУСК
1

U. of ILL. LIBRARY
SEP 9 1971
CHICAGO CIRCLE

1958
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. I. Формулировки. Три основные леммы. Необходимые условия 3
Linnik Yu. V. General Theorems on the Factorization of Infinitely Divisible Laws 39
Дынкин Е. Б. Скачкообразные марковские процессы 41
Dynkin E. B. Markov Jump Processes 60
Takács L. On a Sojourn Time Problem 61
Такач Л. Задача о времени пребывания 69
Маслов К. В. и Повзнер А. Я. Об инфинитезимальных операторах одного класса марковских процессов 70
Maslov K. and *Povzner A.* On Infinitesimal Operators of a Class of Markov Processes 83
Царецградский И. П. Замечание о пропускной способности стационарного канала с конечной памятью 84
Tsaregradsky I. P. On the Capacity of Stationary Channel with Finite Impression 96

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Добрушин Р. Л. Условие непрерывности выборочных функций мартингала . . 97
Dobrushin R. L. The Continuity Condition for Sample Martingale Functions 98
Цзян Цзэ-пей Замечание об определении количества информации 99
Chiang Tse-pei. A Remark on Defining the Quantity of Information . . . 102
Ерохин В. ε-Энтропия дискретного случайного объекта 103
Erohin V. ε-Entropy of a Discrete Random Variable 106
Рихтер В. Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений 107
Richter W. Mehrdimensionale lokale Grenzwertsätze [illegible]ichungen . . 114

Рецензия на книгу [illegible] *В.* . . . 115
Рецензия на книгу [illegible]ия вероятностей и [illegible] . . 117
Рецензия на книгу [illegible]у.
Гнеденко Б. В. . . 118

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АИТ ЗАГ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ III

ЦПБ-Обменный фонд
1953 г. Зксинв. №63

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА — 1958

58
100-483/2

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., Гнеденко Б. В., Золотарев В. М. (ответственный секретарь), *Колмогоров А. Н.* (главный редактор), *Королюк В. С.* (зам. гл. редактора), *Линник Ю. В., Сарымсаков Т. А., Смирнов Н. В., Хинчин А. Я.*

Адрес редакции: Москва В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-18-01

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1958

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

I. ФОРМУЛИРОВКИ. ТРИ ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ

Ю. В. ЛИННИК

0. Около двадцати лет тому назад известная работа Г. Крамера [1] о разложениях нормального закона вызвала ряд исследований по возможным разложениям для тех или иных видов безгранично делимых законов. Сюда относятся работы П. Леви [2], [3], А. Я. Хинчина [4], Д. А. Райкова [5], [6], Р. А. Фишера и Д. Дюгэ [7] и многие другие. Однако эти исследования относились либо к нормальному закону, либо к композициям конечного числа законов пуассонова типа. Как замечает Г. Крамер в обзорной статье [8], общая проблема факторизации безгранично делимых законов оставалась нерешенной.

Согласно известной формуле П. Леви [9], логарифм характеристической функции (в дальнейшем х.ф.) безгранично делимого (в дальнейшем б.д.) закона $\ln \varphi(t)$ однозначно выражается формулой

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dG_-(u) + \int_{0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dG_+(u), \qquad (0.1)$$

где берется ветвь $\ln u$ реальная при положительных u; β и $\gamma \geqslant 0$ реальные константы; $G_-(u)$ и $G_+(u)$ неубывающие функции такие, что $G_-(-\infty) = G_+(\infty) = 0$; и $\int_{-a}^{0} u^2 dG_-(u) + \int_{0}^{a} u^2 dG_+(u) < \infty$ для любого конечного $a > 0$. Далее:

$$\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dG_-(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dG_+(u) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (0.2)$$

Класс всех б.д. законов обозначим I. Композицию двух интегральных законов F_1 и F_2 будем обозначать: $F = F_1 * F_2$; если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ две соответствующие х.ф., то, как известно, они будут перемножаться: $\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$.

Нетрудно описать такие разложения $F \in I$, $F = F_1 * F_2$, где $F_i \in I$ $(i = 1, 2)$, т. е. разложение б.д. законов на б.д. компоненты. Именно,

соответствующие х.ф. должны удовлетворять формуле вида (0.1), причем

$$\beta = \beta_1 + \beta_2;\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2;\ G_- = G_-^{(1)} + G_-^{(2)};\ G_+ = G_+^{(1)} + G_+^{(2)}. \qquad (0.3)$$

Однако компоненты F_1 и F_2 в разложении

$$F = F_1 * F_2 \qquad (0.4)$$

для $F \in I$ не обязаны принадлежать I для всех видов х.ф. типа (0.1).

Мы можем поставить вопрос об описании всех б.д. законов F, которые допускают разложение только на б.д. компоненты. Класс таких законов обозначим I_0; $I_0 \subset I$.

Если в представлении (0.1) $\gamma \neq 0$, то будем говорить, что соответствующий закон F имеет гауссову компоненту; очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы было:

$$F = G * F_1, \qquad (0.5)$$

где G какой-либо невырожденный нормальный закон, а F_1 б.д. закон.

В настоящей работе производится исследование всех б.д. законов, имеющих гауссову компоненту и принадлежащих I_0 (имеющих только б.д. компоненты). Введем некоторую терминологию. Будем называть функции $G_-(u)$ и $G_+(u)$ пуассоновым спектром закона F; $G_-(u)$ будет отрицательной, а $G_+(u)$ положительной частью пуассонова спектра. Если $dG_-(u) \equiv 0$, то будем говорить, что б.д. закон F имеет положительный пуассонов спектр; аналогично определяются законы с отрицательным пуассоновым спектром. Если $dG_+(u) = 0$ при $u \geqslant U_0 > 0$, то будем говорить, что положительная часть пуассонова спектра ограничена; аналогично вводим понятие ограниченности отрицательной части пуассонова спектра. Если $dG_-(u) = dG_+(u) = 0$ при $|u| \geqslant U_0$, то говорим, что пуассонов спектр ограничен. Естественно появляются случаи конечного и счетного пуассонова спектра. В случае конечного спектра имеем:

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m (e^{it\mu_m} - 1) + \sum_{n=1}^{N} \lambda_{-n} (e^{-it\nu_n} - 1), \qquad (0.6)$$

где M, N конечные целые неотрицательные числа, $\lambda_m > 0$, $\lambda_{-n} > 0$; $\mu_m > 0$; $\nu_n > 0$. Отдельная пуассонова компонента P в (0.6) имеет х.ф. $\exp(\lambda_m (e^{it\mu_m} - 1))$ или $\exp(\lambda_{-n} (e^{-it\nu_n} - 1))$; при этом

$$\mu_m = \frac{\mathrm{D}(P)}{\mathrm{E}(P)} \text{ или } \nu_n = \frac{\mathrm{D}(P)}{\mathrm{E}(P)}. \qquad (0.7)$$

Случай конечного спектра важен, ибо, как известно (см. А. Я. Хинчин [10]), совокупность I всех б.д. законов совпадает с совокупностью законов предельных для законов вида (0.6) (даже если брать только законы $\gamma = 0$). Случай счетного пуассонова спектра описывается формулой:

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(e^{it\mu_m} - 1 - \frac{it\mu_m}{1 + \mu_m^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n} \left(e^{-it\nu_n} - 1 + \frac{it\nu_n}{1 + \nu_n^2} \right), \qquad (0.8)$$

где $\lambda_m > 0$, $\lambda_{-n} > 0$ и ряды:

$$\sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_m \mu_m^2}{1+\mu_m^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_{-n} \nu_n^2}{1+\nu_n^2} \tag{0.9}$$

сходятся, причем

$$\sum_{\mu_m < \varepsilon} \lambda_m \mu_m^2 + \sum_{\nu_n < \varepsilon} \lambda_{-n} \nu_n^2 \to 0 \tag{0.10}$$

при $\varepsilon \to 0$.

В иных случаях будем говорить, что спектр имеет континуальную часть. Параметры λ_i можно называть «параметрами энергии» при μ_i или $-\nu_i$.

Интересный класс б.д. законов составляют законы с ограниченным пуассоновым спектром. Их х.ф. имеет вид:

$$\ln \varphi(t) = \beta i t - \gamma t^2 + \int_{-b}^{0} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_1(u) + \int_{0}^{a} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_2(u), \tag{0.11}$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ ограниченные числа; $G_1(u)$ и $G_2(u)$ неубывающие функции, ограниченные вне сегмента $[-\varepsilon, \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$, так что сумма

$$\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dG_1(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dG_2(u) \tag{0.12}$$

ограничена при $\varepsilon > 0$ и стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Здесь пуассонов спектр частот лежит в сегменте $[-b, a]$; неотрицательности «приращений энергии» $dG_i(u)$ $(i = 1, 2)$ отвечает безграничная делимость для х.ф. вида (0.11). В дальнейшем у нас будут встречаться х.ф. типа (0.11), допускающие «отрицательное приращение энергии» $dG_i(u)$ $(i = 1, 2)$; мы будем говорить об их «обобщенном пуассоновом спектре частот».

1. Вернемся к множеству I_0 законов, имеющих только б.д. компоненты. Отдельные элементы этого множества были указаны в нескольких работах. Так, закон Гаусса $G \in I_0$ (Г. Крамер [1]), закон Пуассона $P \in I_0$ (Д. А. Райков [5], [6]); композиция законов Гаусса и Пуассона принадлежит I_0 (Ю. В. Линник [11] и [12]). Метод работ [11] и [12] приводит к общей теореме:

Теорема 1. *Для того, чтобы безгранично делимый закон F, имеющий гауссову компоненту, разлагался только на безгранично делимые компоненты, необходимо, чтобы его пуассонов спектр был конечным или счетным. При этом пуассоновы частоты μ_m и ν_n в формулах* (0.6) *и* (0.8) *должны совпадать с рядами чисел:*

для μ_m:

$$\ldots,\ k_{-2}k_{-1}\mu,\ k_{-1}\mu,\ \mu,\ \frac{\mu}{k_1},\ \frac{\mu}{k_1 k_2},\ \ldots \tag{1.1}$$

для ν_n:

$$\ldots,\ l_{-2}l_{-1}\nu,\ l_{-1}\nu,\ \nu,\ \frac{\nu}{l_1},\ \frac{\nu}{l_1 l_2},\ \ldots,\ \frac{\nu}{l_1 l_2 \ldots l_s},\ \ldots, \tag{1.2}$$

где $\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_1, k_2, k_3, \ldots u\ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, l_3, \ldots$ *какие-либо наборы натуральных чисел, больших единицы (допускаются повторения). В случае ограниченности этого спектра это необходимое условие является и достаточным.*

Соответственно (0.9) и (0.10), ряды

$$\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_1^{(s)} \frac{1}{1+\left(\frac{k_1 \ldots k_s}{\mu}\right)^2}; \quad \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_2^{(s)} \frac{1}{1+\left(\frac{l_1 \ldots l_s}{\nu}\right)^2},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_1^{(-s)}; \quad \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_2^{(-s)}$$

должны быть сходящимися и, значит, суммы

$$\sum_{s \geqslant s_0} \lambda_1^{(s)} \frac{1}{1+\left(\frac{k_1 \ldots k_s}{\mu}\right)^2}; \quad \sum_{s \geqslant s_0} \lambda_2^{(s)} \frac{1}{1+\left(\frac{l_1 \ldots l_s}{\nu}\right)^2}$$

стремящимися к 0 при $s_0 \to \infty$; при этом $\lambda_i^{(s)}$ и $\lambda_i^{(-s)}$ означают «λ — параметры» в формуле (0.8) при соответствующих пуассоновых частотах (параметры энергии).

Случай неограниченного пуассонова спектра будет исследован отдельно; пока достаточность получается лишь при некоторых дополнительных предположениях.

Доказательство теоремы 1 весьма затруднительно и требует ряда вспомогательных теорем. Весьма существенно при этом наличие гауссовой компоненты у закона F ($\gamma > 0$ в формуле (0.1)).

Если $\gamma = 0$, картина совершенно меняется; соответствующие теоремы будут изложены в ч. III данной работы.

Для случая ограниченного пуассонова спектра можно сформулировать теорему:

Теорема 2. *Пусть F б.д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, так что для его х.ф. имеет место формула* (0.11). *Всем его разложениям $F = F_1 * F_2$ отвечают х.ф. $\varphi_j(t)$ $(j = 1, 2)$, вида:*

$$\varphi_j(t) = \exp\left(P_{3j}(it) + t^4 \int_{-b}^{a} e^{itu} \Phi_j(u)\, du\right), \tag{1.3}$$

где $P_{3j}(it)$ — полином не более, чем третьей степени, а $\Phi_j(u)$ реальная функция, суммируемая с квадратом на сегменте $[-b, a]$.

Пусть F б.д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, сосредоточенным на сегменте $[-b, a]$ (см. ф-лу (0.11)). Будем говорить, что пуассонов спектр F рационален правее точки α; $0 < \alpha < a$, если его х.ф. имеет вид

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^{0} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_1(u) +$$

$$+ \int_{0}^{\alpha} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_2(u) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\exp\left(it \frac{a_j \mu}{q}\right) - 1\right), \tag{1.4}$$

где $\lambda_j > 0$, a_j, q целые, $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$; $\frac{a_1}{q}\mu > \alpha$; $\mu > 0$. Совершенно аналогично определяем пуассонов спектр, рациональный левее точки $\beta < 0$; $\beta > -b$.

Теорема 3. *Пусть F б.д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, рациональным правее точки $\alpha \geqslant 0$; $\alpha < a$ (в ф-ле (0.11)). Тогда всем его компонентам отвечают х.ф. вида:*

$$\ln \varphi(t) = P_3(it) + t^4 \int_{-b}^{\alpha} e^{itu}\Phi(u)\,du + \sum_{n=1}^{q} (\alpha_n + \beta_n it)\left(\exp\frac{itn\mu}{q} - 1\right), \quad (1.5)$$

где α_n, β_n — реальные числа (не обязательно положительные), $\Phi(u)$ — суммируемая с квадратом на $[-b, \alpha]$ функция; $P_3(it)$ — полином не более, чем третьей степени.

Совершенно аналогичная теорема имеет место для законов с ограниченным пуассоновым спектром, рациональным левее точки $\beta \leqslant 0$, $\beta > -b$.

Отметим частный случай теоремы 3, когда $b = \alpha = 0$, $m = q = a_1 = 1$, так что

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \lambda_1 (e^{it\mu} - 1),$$

и мы имеем композицию законов Пуассона и Гаусса. Согласно (1.5) всякая компонента такой композиции имеет вид:

$$\ln \varphi(it) = P_3(it) + (\alpha_1 + \beta_1 it)(\exp(it\mu) - 1).$$

Легко установить, что $\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta_1 = 0$, а $P_3(it)$ полином степени не выше 2, так что $\varphi(t)$ снова отвечает композиции законов Пуассона и Гаусса. Это и есть основной результат работ [11] и [12].

2. В части I настоящей работы мы будем заниматься только теоремой 1 и будем доказывать необходимость высказанного там условия для того, чтобы б.д. закон $F \in I_0$. Эта необходимость легко выводится из следующих трех основных лемм, имеющих и некоторый самостоятельный интерес.

Основная лемма I. *Пусть $\alpha = \frac{p}{q}$ — рациональное число, причем дробь $\frac{p}{q}$ несократима, и*

$$1 < p < q. \quad (2.1)$$

*Сопоставим случайную величину X с х.ф.**

$$\varphi(z) = \mathbf{E}\exp(zX) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1)), \quad (2.2)$$

где $\gamma > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

При достаточно малом $\nu > 0$ функция

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp(-\nu(e^{\frac{z}{q}} - 1)) =$$

$$= \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1) - \nu(e^{\frac{z}{q}} - 1)) \quad (2.3)$$

будет х.ф. некоторой случайной величины Y.

* В дальнейшем под х.ф. будем понимать $\varphi(z) = \mathbf{E}\exp(zX)$ для тех комплексных z, для которых соответствующие интегралы сходятся.

Основная лемма II. *Пусть* $\alpha \in (0.1)$ *иррациональное число. Составим случайную величину* X *с х.ф.*

$$\varphi(z) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1)); \quad \gamma,\ \lambda_i > 0. \tag{2.4}$$

При достаточно малом $\nu > 0$ *и надлежаще выбранном малом* $\eta_0 > 0$ *функция*

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp(-\nu(e^{\eta_0 z} - 1)) =$$

$$= \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)) \tag{2.5}$$

будет х.ф. некоторой случайной величины Y.

Основная лемма III. *Пусть* $G(u)$ *непрерывная неубывающая на сегменте* $[\beta, 1]$; $\beta < 1$ *функция, и* $G(1) - G(\beta) > 0$. *Составим случайную величину* X *с х.ф.*

$$\varphi(z) = \exp\left(\gamma z^2 + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dG(u)\right). \tag{2.6}$$

При достаточно малом $\nu > 0$ *и подходяще выбранном малом* $\eta_0 > 0$ *функция*

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp(-\nu(e^{\eta_0 z} - 1)) =$$

$$= \exp\left(\gamma z^2 + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dG(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right) \tag{2.7}$$

будет х.ф. некоторой случайной величины Y.

Доказательство этих лемм производится методом перевала; сперва оно идет одинаково во всех трех случаях, затем разветвляется на специфические для каждого из трех случаев приемы.

Для проведения общей части доказательства запишем каждую из трех х.ф. (2.2), (2.4), (2.6) в виде:

$$\varphi(z) = \exp\left(\gamma z^2 + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dH(u)\right), \tag{2.8}$$

где $\beta < 1$, а $H(u)$ — ограниченная неубывающая функция, причем

$$H(1) - H(\beta) = c > 0. \tag{2.9}$$

Докажем, что случайная величина X с х.ф. (2.8) имеет плотность вероятности $g(x) > 0$ при всех x.

Составим интеграл

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(it)\, e^{-ixt} dt. \tag{2.10}$$

Из (2.8) заключаем, что этот интеграл сходится абсолютно и равномерно по x, так что плотность вероятности $g(x)$ существует и непрерывна на всей реальной оси. Далее, из (2.8) видим, что случайную величину

X с х.ф. (2.8) можно представить в виде суммы двух независимых случайных величин X_1 и X_2:

$$X = X_1 + X_2, \tag{2.11}$$

причем $\mathbf{E}\exp zX_1 = \exp(\gamma z^2)$, т. е. X_1 нормально и невырожденно $(\gamma > 0)$ и $\mathbf{E}\exp zX_2 = \exp\left(\int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dH(u)\right)$.

Рассмотрим случайную величину X_2. Существует точка ξ такая, что при любом $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}\{\xi - \varepsilon \leqslant X_2 \leqslant \xi + \varepsilon\} > 0. \tag{2.12}$$

Пусть F_1 (нормальный) закон распределения, отвечающий X_1, а F_2 закон распределения X_2. Тогда X имеет закон распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - y)\, dF_2(y).$$

Дифференцируя по x, находим:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1'(x - y)\, dF_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y), \tag{2.13}$$

где интеграл справа, очевидно, сходится равномерно по x в каждом конечном сегменте значений x, и $\sigma^2 = \mathbf{D}(X_1)$. Очевидно, при любом $\varepsilon > 0$:

$$g(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|y-\xi| \leqslant \varepsilon} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y) > c(x) \int_{|y-\xi| \leqslant \varepsilon} dF_2(y) > 0,$$

где $c(x)$ — некоторая положительная константа, зависящая от x, и учитывается (2.12). Этим доказано желаемое.

Пусть теперь $\eta_0 > 0$ — какое-либо число, меньшее β, $\nu > 0$ малое число; составим

$$\psi(it) = \varphi(it) \exp[-\nu(e^{\eta_0 it} - 1)] \tag{2.14}$$

и

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(it)\, e^{-ixt} dt. \tag{2.15}$$

Покажем, что:

$$g_\nu(x) > 0 \text{ при } |x| \leqslant X_0(\nu), \tag{2.16}$$

где $X_0(\nu)$ — сколь угодно большая константа при достаточно малом ν.

При заданной константе $X_0 > 0$, находим $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $g(x) \geqslant \varepsilon_0$ при $|x| \leqslant X_0$, что возможно на основании предыдущего утверждения. Выберем теперь T_0 так, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geqslant T_0} |\psi(it)|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geqslant T_0} |\varphi(it)|\, dt < \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{2.17}$$

что возможно согласно (2.8) и (2.14).

Пусть, далее, $\nu > 0$ столь мало, что при $|t| \leqslant T_0$

$$|\varphi(it) - \varphi(it)| < \frac{\varepsilon_0}{8T_0}. \tag{2.18}$$

Отсюда имеем: из (2.10) и (2.15)

$$|g_\nu(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(it) - \psi(it)|\, dt < T_0 \frac{\varepsilon_0}{8T_0} + \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.19}$$

В силу того, что $g(x) \geqslant \varepsilon_0$ при $|x| \leqslant X_0$, имеем: $g_\nu(x) > g(x) - \frac{\varepsilon_0}{2} > \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $|x| \leqslant X_0$, что и доказывает (2.16).

3. Общим для доказательства трех основных лемм будет изучение поведения $g_\nu(x)$ при $x < 0$. Обратимся к выражениям (2.8) и (2.10).

При данном γ выбираем X_0 столь большим, как это нам понадобится далее; соответственно ему выбираем малое $\nu > 0$ в (2.14); полагаем η_0 малым заданным числом. Имеем (см. (2.15)):

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=0} \psi(z)\, e^{-xz} dz, \tag{3.1}$$

где $z = \sigma + it$. Далее:

$$\psi(z)\, e^{-xz} = \exp\left(\gamma z^2 - zx + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right) =$$

$$= \exp\left[\gamma\left(z - \frac{x}{2\gamma}\right)^2 - \frac{x^2}{4\gamma^2} + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right]. \tag{3.2}$$

Здесь считаем $x < 0$. Из теоремы Коши непосредственно явствует, что контур интегрирования в (3.1) можно переносить на любую вертикальную прямую. Естественно выбрать контур $\sigma = \frac{x}{2\gamma} = \sigma_0$ (при $x < 0$, точка $z = \frac{x}{2\gamma}$ мало отличается от точки перевала для $\ln(\psi(z)\, e^{-xz})$. Тогда получим:

$$g_\nu(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4\gamma^2} - H(1) + H(\beta) + \nu\right] \cdot J(t), \tag{3.3}$$

где

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\gamma t^2 + \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} e^{itu} dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} e^{\eta_0 it}\right] dt. \tag{3.4}$$

Далее имеем:

$$\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} e^{itu} dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} e^{it\eta_0} = \theta c_0 \exp\left(-\eta_0 \frac{|x|}{2\gamma}\right) \tag{3.5}$$

($c_0, c_1, \ldots$ в дальнейшем положительные константы, $|\theta| \leqslant 1$; θ в дальнейшем не всегда одно и то же). Отсюда:

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\gamma t^2 + \theta c_0 \exp - \eta_0 \frac{|x|}{2\gamma}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\left(1 + \theta c_0 \exp\left(-\eta_0 \frac{|x|}{2\gamma}\right)\right) dt >$$

$$> \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2) \cdot \frac{1}{2}\, dt > \frac{c_1}{\sqrt{\gamma}} \qquad (3.6)$$

при $|x|$ достаточно большом сравнительно с γ и $\frac{1}{\eta_0}$, что и будем предполагать. Таким образом, $g_\nu(x) > 0$ при $x < -X_0$ и, при достаточно малом ν, $g_\nu(x) > 0$ при $x \leqslant 0$.

4. Перейдем к случаю $x \geqslant X_0$. Рассмотрим выражение вида (3.1), где

$$\psi(z)\, e^{-xz} = \exp\left[\gamma z^2 - zx + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right]. \qquad (4.1)$$

Для нахождения точек перевала, берем производную в экспоненте и приравниваем ее к 0:

$$2\gamma z + \int_\beta^1 e^{zu} u\, dH(u) - \nu\eta_0 e^{\eta_0 z} - x = 0.$$

Это уравнение, очевидно, имеет положительный корень $z = \sigma_0$, зависящий от x и монотонно возрастающий вместе с ним:

$$2\gamma\sigma_0 + \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} u\, dH(u) - \nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0} - x = 0. \qquad (4.2)$$

Полагаем $z = \sigma_0 + it$ и переносим контур интегрирования на $\sigma = \sigma_0$. Имеем на этом контуре из (4.1)

$$\psi(z)\, e^{-xz} = \exp U_1(x) \cdot \exp V_1(t) \cdot \exp V_2(t), \qquad (4.3)$$

где

$$U_1(x) = \gamma\sigma_0^2 - \sigma_0 x + h_0, \quad h_0 = \int_\beta^1 dH(u) + \nu_0, \qquad (4.4)$$

$$V_1(t) = -\gamma t^2 + it(2\gamma\sigma_0 - x), \qquad (4.5)$$

$$V_2(t) = \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}(\cos tu + i \sin tu)\, dH(u) - \nu e^{\eta_0\sigma_0}(\cos\eta_0 t + \sin\eta_0 t). \qquad (4.6)$$

Положим:

$$U_0(\sigma_0) = \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} dH(u) - \nu e^{\eta_0\sigma_0},$$

$$V_3(t) = 2\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} \cdot \sin^2\frac{tu}{2}\, dH(u) - 2\nu e^{\eta_0\sigma_0} \cdot \sin^2\frac{\eta_0 t}{2}, \qquad (4.7)$$

$$V_4(t) = \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} \cdot \sin tu\, dH(u) - \nu e^{\eta_0\sigma_0} \sin\eta_0 t + t(2\gamma\sigma_0 - x). \qquad (4.8)$$

Тогда:

$$\psi(z)\,e^{-xz} = \exp(U_1(x) + U_0(\sigma_0))\exp(-\gamma t^2)\exp(-V_3(t))\exp(iV_4(t)), \qquad (4.9)$$

разумеется, $V_3(t)$ и $V_4(t)$ зависят от x.

Вычислим производную от $V_4(t)$:

$$V_4'(t) = \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}\cdot u\cdot\cos tu\cdot dH(u) - \nu e^{\eta_0\sigma_0}\cdot\eta_0\cdot\cos\eta_0 t + 2\gamma\sigma_0 - x.$$

В силу (4.2) имеем

$$2\gamma\sigma_0 - x - \nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0} + \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} u dH(u) = 0,$$

так что:

$$V_4'(t) = -2\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}\cdot u\cdot\sin^2\frac{tu}{2}\,dH(u) + 2\nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0}\cdot\sin^2\frac{\eta_0 t}{2} \qquad (4.10)$$

5. Теперь обратимся отдельно к основной лемме I. В условиях этой леммы (см. (2.1)—(2.3)) положим, что функция $H(u)$ в (4.1) кусочно постоянная со скачками $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ в точках $u = 1$ и $u = \alpha$. Кроме того, положим $\eta_0 = \frac{1}{q}$; $\nu \in (0, 1)$ пока не фиксируем. Получим при $x \geqslant X_0$:

$$\psi(z)\,e^{-xz} = \exp U_0(x)\exp(-\gamma t^2)\exp(-2e^{\sigma_0}U(t))\exp(iV(t)), \qquad (5.1)$$

где

$$U(t) = \lambda_1\sin^2\frac{t}{2} + \lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{pt}{2q} - \nu\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{t}{2q} \qquad (5.2)$$

$$V(t) = \lambda_1\exp(\sigma_0)\sin t + \lambda_2\exp\left(\frac{p}{q}\sigma_0\right)\sin\frac{pt}{q} - \nu\exp\left(\frac{\sigma_0}{q}\right)\sin\frac{t}{q} + t(2\gamma\sigma_0 - x), \qquad (5.3)$$

$$U_0(x) = \gamma\sigma_0^2 - \sigma_0 x - \lambda_1 - \lambda_2 + \nu. \qquad (5.4)$$

Считая X_0, а следовательно и σ_0, достаточно большим, рассмотрим такие значения t, для которых

$$|U(t)| \leqslant \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \qquad (5.5)$$

Пусть в дальнейшем B означает ограниченную для всех значений встречающихся параметров функцию, не всегда одну и ту же. Из (5.5) и (5.2) следует:

$$\lambda_1\sin^2\frac{t}{2} + \lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{pt}{2q} = B\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right). \qquad (5.6)$$

Отсюда

$$\sin^2\frac{t}{2} = B\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right); \quad \sin^2\frac{pt}{2q} = B\exp\left(\frac{1-p}{q}\sigma_0\right) \qquad (5.7)$$

и

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| = B\exp\left(\frac{p-q}{q}\frac{\sigma_0}{2}\right); \quad \left|\sin\frac{p}{q}\frac{t}{2}\right| = B\exp\left(\frac{1-p}{2q}\frac{\sigma_0}{2}\right). \qquad (5.8)$$

Заметим, что $p > 1$, в силу (2.1), так что обе оценки (5.8) нетривиальны

при достаточно большом σ_0. Из них выводим:

$$t = 2k_1\pi + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right),$$

$$\frac{p}{q}t = 2k_2\pi + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right),$$

где k_1, k_2 — целые числа. Умножая эти равенства на q, найдем новые равенства:

$$\left.\begin{aligned} qt &= 2k_1 q\pi + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right), \\ pt &= 2k_2 q\pi + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то целые числа p и q взаимно просты. Ввиду этого найдутся целые числа a и b; $(|a|<q;\ |b|<p)$ такие, что $ap + bq = 1$. Умножая первое из соотношений (5.9) на b, второе на a и складывая, найдем:

$$t = 2kq\pi + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right); \quad (k \text{ целое}) \tag{5.10}$$

если $U(t)$ удовлетворяет (5.5). Итак, для значений t под условием (5.5) можем положить:

$$t = 2kq\pi + v; \quad |v| < c_1\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right) \tag{5.11}$$

(далее, c_1, c_2 ... положительные константы).

Допустим теперь, что $U(t)$ удовлетворяет (5.5). Тогда имеет место 5.11). Пользуясь (5.2), находим:

$$U(t) = \lambda_1\sin^2\frac{v}{2} + \lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\left(\frac{p}{q}\frac{v}{2}\right) - \nu\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\left(\frac{1}{q}\cdot\frac{v}{2}\right).$$

Ввиду малости $|v|$, согласно (5.11), имеем:

$$U(t) = \lambda_1\frac{v^2}{4}(1 + \Delta(\sigma_0, v)), \tag{5.12}$$

где $\Delta(\sigma_0, v) \to 0$ при увеличении σ_0 равномерно по v при (5.11). Это рассуждение годно при любом значении параметра $\nu \in (0, 1)$.

Если условие (5.5) удовлетворяется, то, как мы видим, выполняется (5.12). Допустим теперь, что при условии (5.11), имеем

$$|v| > \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right) = \xi_1. \tag{5.13}$$

Тогда из (5.12) находим:

$$U(t) > \frac{1}{8}\exp\left[-\left(1 - \frac{1}{2q}\right)\sigma_0\right] > \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{5.14}$$

6. Докажем, что при всех значениях t, имеем

$$U(t) \geqslant 0. \tag{6.1}$$

В самом деле, $U(t)$ — тригонометрический полином от $\frac{t}{2q}$. При $t=\pi$ и достаточно большом σ_0 (что предлагается здесь и в дальнейшем) имеем, очевидно, $U(t)>0$. Если для какого-либо t_1, $U(t_1)<0$, то должен иметься хоть один нуль t_0 функции $U(t)$ нечетной кратности, так что

$$U(t_0)=0, \tag{6.2}$$

$$U(t_0-\delta)\,U(t_0+\delta)<0 \tag{6.3}$$

для всех достаточно малых $\delta>0$. Сопоставляя (6.2) с (5.5), находим: $t_0=2k_0q\pi+v_0$, где k_0 целое, и v_0 имеет оценку (5.11). При достаточно малых δ, получим из (5.2): $U(t_0-\delta)\geqslant 0$; $U(t_0+\delta)\geqslant 0$, что противоречит (6.3) и доказывает (6.1).

Рассмотрим теперь значения t, нарушающие неравенство (5.5). В силу (6.1), для таких t имеем:

$$U(t)>\exp\left[-\left(1-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{6.4}$$

Вернемся теперь к основной формуле:

$$g_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-xz}dt,\quad z=\sigma_0+it \tag{6.5}$$

(см. п. 2 и 3). Ось интегрирования по t разобьем на два множества: множество T тех значений t, для которых выполняется (5.5), и дополнительное множество D, где верно (6.4). Заметим, что, в силу сказанного выше, из (5.5) следует более сильное неравенство:

$$0\leqslant U(t)\leqslant\exp\left[-\left(1-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{6.6}$$

Множество T, как доказано в п. 5, содержится в системе сегментов:

$$|t-2kq\pi|=|v|\leqslant\xi_1=\exp\left[-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right];\quad (k=0;\pm1,\pm2,\ldots) \tag{6.7}$$

которую мы обозначим T_q; дополнение к T_q, которое мы обозначим D_q, содержится в D. Соответственно этому, разобьем (6.5) на два интеграла:

$$g_\nu(x)=J_{1\nu}(x)+J_{2\nu}(x), \tag{6.8}$$

где

$$J_{1\nu}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t\in T_q}\psi(z)\,e^{-zx}dt, \tag{6.9}$$

$$J_{2\nu}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t\in D_q}\psi(z)\,e^{-zx}dt. \tag{6.10}$$

Оценим $J_{2\nu}(x)$. При $t\in D_q$ выполняется (6.4). Ввиду этого при $z=\sigma_0+it$, в силу (5.1),

$$|\psi_\nu(z)\,e^{-zx}|\leqslant\exp U_0(x)\exp(-\gamma t^2)\exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right), \tag{6.11}$$

откуда:

$$|J_{2\nu}(x)| \leqslant \exp U_0(x) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\, dt =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{\gamma}} \exp(U_0(x)) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right). \tag{6.12}$$

7. Обратимся к $J_{1\nu}(x)$. Из T_q выделим те значения t, для которых:

$$|2\pi q k| \leqslant \frac{\sigma_0 q}{\sqrt{\gamma}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) = \rho_0. \tag{7.1}$$

Это множество обозначим T_{0q}, а дополнение T_{0q} в T_q обозначим T_{1q}. Имеем, в силу (5.1) и (6.1), при $t \in T_{1q}$

$$|\psi(z)\, e^{-zx}| \leqslant \exp(U_0(x)) \exp(-\gamma t^2), \tag{7.2}$$

так что:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{t\in T_{1q}} \psi(z)\, e^{-zx} dt\right| \leqslant \exp[U_0(x)] \int_{\rho_0}^{\infty} \exp[-\gamma t^2]\, dt =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{\gamma}} \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{q^2}{2}\sigma_0^2\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)\right]. \tag{7.3}$$

Остается интеграл:

$$J_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{t\in T_{0q}} \psi(z)\, e^{-zx} dt. \tag{7.4}$$

Он является реальным числом в силу симметричности T_{0q} относительно 0. Мы будем оценивать его снизу.

Рассмотрим один из сегментов, входящих в T_{0q},

$$\omega_k : |v| = |t - 2kq\pi| \leqslant \xi_1 = \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right). \tag{7.5}$$

Обращаясь к (5.1), находим для таких t:

$$\gamma t^2 = \gamma(2kq\pi + v)^2 = 4\pi^2\gamma k^2 q^2 + 4\pi\gamma kqv + \gamma v^2.$$

Ввиду (7.1) и (7.5)

$$4\pi\gamma kqv + \gamma v^2 = B\gamma \exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right). \tag{7.6}$$

Таким образом, при $t \in \omega_k$

$$\exp(-\gamma t^2) = \exp(-4\pi^2\gamma q^2 k^2)\left(1 + B\gamma\exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right)\right). \tag{7.7}$$

Далее в силу (5.12):

$$\exp(-2e^{\sigma_0} U(t)) = \exp\left[-\frac{v^2}{2}\lambda_1 e^{\sigma_0}(1 + \Delta(\sigma_0, v))\right]. \tag{7.8}$$

Перейдем к функции $V(t)$ (см. (5.3)). В силу (4.10) имеем:

$$V'(2kq\pi) = V''(2kq\pi) = 0;$$

$$V^{(m)}(2kq\pi) = Be^{\sigma_0}. \quad (m \geqslant 3) \tag{7.9}$$

Таким образом,

$$V(t) = V(2kq\pi) + Be^{\sigma_0}\xi_1^3 = V(2kq\pi) + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{5}\right). \tag{7.10}$$

Собирая эти оценки и подставляя в (5.1) при $t \in T_{0q}$, находим:

$$\psi(z)\,e^{-zx} = \exp[U_0(x)]\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\exp\left[-\frac{v^2}{2}e^{\sigma_0}(1+\Delta(\sigma_0, v))\right]\cdot$$

$$\cdot\exp[iV(2kq\pi)]\left(1 + B(1+\gamma)\exp\left[-\frac{\sigma_0}{5}\right]\right). \tag{7.11}$$

Рассмотрение интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_k}\psi(z)\,e^{-zx}dt \tag{7.12}$$

приводится к рассмотрению

$$\int_{|v|\leqslant\xi_1}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\lambda_1 e^{\sigma_0}(1+\Delta(\sigma_0, v)\right)dv. \tag{7.13}$$

Полагая $ve^{\sigma_0/2} = w$, приведем наш интеграл к виду:

$$\lambda_1^{-1/2}e^{-\sigma_0/2}\cdot\int_{|w|\leqslant\xi_1 e^{\sigma_0/2}}\exp\left[-\frac{w^2}{2}(1+\delta(w))\right]dw, \tag{7.14}$$

где $|\delta(w)| \leqslant \delta(\sigma_0)$ при всех w сегмента интегрирования, и $\delta(\sigma_0)\to 0$ при $\sigma_0\to\infty$. Ввиду того, что $\xi_1 e^{\sigma_0/2} = \exp\left(\frac{\sigma_0}{4q}\right)$, элементарными рассуждениями находим для (7.14) выражение:

$$\lambda_1^{-1/2}\sqrt{2\pi}e^{-\sigma_0/2}(1+\Delta_1(\sigma_0)), \tag{7.15}$$

где $\Delta_1(\sigma_0)\to 0$ при $\sigma_0\to\infty$. Из (7.7)—(7.15) находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_k}\psi(z)\,e^{-zx}dt = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\cdot\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\cdot$$

$$\cdot\exp[iV(2\pi qk)] + B(1+\gamma)e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\cdot\exp[-4\pi^2\gamma qk^2]\cdot\Delta_1(\sigma_0);$$

$$\Delta_1(\sigma_0)\to 0 \text{ при } \sigma_0\to\infty.$$

При этом, согласно (5.3)

$$V(2\pi qk) = 2\pi qk(2\gamma\sigma_0 - x). \tag{7.16}$$

8. Вернемся к интегралу (7.4). Имеем:

$$J_\nu = \frac{\lambda_1^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\cdot\sum_{|2\pi qk|\leqslant\rho_0}\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\exp[iV(2\pi qk)] +$$

$$+ B(1+\gamma)e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\left(\sum_{|2\pi qk|\leqslant\rho_0}\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\right)\Delta_1(\sigma_0) \tag{8.1}$$

(см. (7.1)). Если мы распространим суммирование на все целые числа k в (8.1), то получим погрешность;

$$Be^{-\sigma_0/2}\cdot\exp[U_0(x)]\cdot\Delta_2(\sigma_0); \quad \Delta_2(\sigma_0)\to 0, \tag{8.2}$$

как очевидно из (7.1). Таким образом:

$$J_\nu = \frac{\lambda_1^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \cdot S + B(1+\gamma) e^{-\sigma_0/2} \cdot$$

$$\cdot \exp[U_0(x)] \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-4\pi^2\gamma q^2 k^2] \Big) \Delta_2(\sigma_0), \tag{8.3}$$

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-4\pi^2\gamma q^2 k^2 + i(2\pi qky)], \tag{8.4}$$

где $y = 2\gamma\sigma_0 - x$ (см. (7.16)).

Согласно классической формуле Пуассона из теории ϑ-функций (см., напр., Р. Курант и Д. Гильберт [13], стр. 68—69), имеем: при $\operatorname{Re}\omega > 0$,

$$S_0(\omega, \xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi k^2\omega) \exp(2\pi i k\xi) = (\pi^2\omega)^{-1/2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi^2 \frac{(\xi-k)^2}{\omega}\right].$$

Таким образом

$$S = S_0(4\pi\gamma q^2, qy) = \frac{1}{(4\pi^3\gamma q^2)^{1/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2(qy-k)^2}{4\pi\gamma q^2}\right]. \tag{8.5}$$

Далее, очевидно:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2(qy-k)^2}{4\pi\gamma q^2}\right] > \exp\left[-\frac{\pi}{8\gamma q^2}\right],$$

так что S — реальное число, и

$$S > c_2(\gamma q^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{8\gamma q^2}\right). \tag{8.6}$$

Далее, очевидно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-4\pi^2\gamma q^2 k^2) = B(1+\gamma^{-1/2}q).$$

Подставляя полученные оценки в (8.3), находим:

$$J_\nu > c_2\gamma^{-1/2}q^{-1} \exp\left[-\frac{\pi}{8\gamma q^2}\right] \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2} (1 - B(1+\gamma))(1+\gamma^{-1/2})\, \Delta_2(\sigma_0).$$

Таким образом, при достаточно большом σ_0, имеем:

$$J_\nu > c_2\gamma^{-1/2}q^{-1} \exp\left(-\frac{\pi}{8\gamma q^2}\right) e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)]. \tag{8.7}$$

Обратимся к (6.5). Сравнивая (6.9) с (8.7), находим:

$$J_{1\nu}(x) = J_\nu(1 + B \cdot \Delta(\sigma_0)); \quad \Delta(\sigma_0) \to 0 \text{ при } \sigma_0 \to \infty.$$

Далее, сравнивая (6.12) с (8.7), находим: $J_{2\nu}(x) = B.J_\nu.\Delta(\sigma_0)$. Обращаясь к (6.8), находим

$$g_\nu(x) = J_\nu(1 + B.\Delta(\sigma_0)). \tag{8.8}$$

Это верно при любом $\nu \in (0, 1)$ и $\Delta(\sigma_0) \to 0$ равномерно по ν, при $\sigma_0 \to \infty$.

Теперь можно завершить доказательство основной леммы I. Выберем X_0 столь большим, чтобы при $x \geqslant X_0$ и любом $\nu \in (0, 1)$, $g_\nu(x) > \frac{1}{2} J_\nu > 0$. Затем выберем ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ при $|x| \leqslant X_0$. Мы можем, согласно п. 3, считать X_0 столь большим и, соответственно, ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ и при $x \leqslant -X_0$. Этим основная лемма I доказана.

9. Перейдем к доказательству основной леммы II. Оставляя в (2.5) $\nu \in (0, 1)$ и $\eta_0 \in \left(0, \frac{\alpha}{8}\right)$ пока неопределенными, как и в п. 5 ((5.1)—(5.3)) напишем: при $x \geqslant X_0 > 1$

$$\psi(z)\, e^{-zx} = \exp[U_0(x)] \exp[-\gamma t^2] \exp[-2e^{\sigma_0} U(t)] \exp[V(t)], \quad (9.1)$$

где

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1)\sigma_0 \cdot \sin^2 \frac{\alpha t}{2} - \nu \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0 \cdot \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}, \quad (9.2)$$

$$V(t) = \lambda_1 e^{\sigma_0} \sin t + \lambda_2 e^{\alpha\sigma_0} \sin \alpha t - \nu \exp(\eta_0 \sigma_0) \sin \eta_0 t + t(2\gamma\sigma_0 - x), \quad (9.3)$$

$U_0(x)$ определяется формулой (5.4).

Иррациональное число $\alpha \in (0, 1)$ разложим в непрерывную дробь

$$\alpha = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

$q_i \geqslant$ — целые числа — неполные частные α. Зададим ряд подходящих дробей α: $\frac{p_1}{Q_1}, \frac{p_2}{Q_2}, \ldots, \frac{p_n}{Q_n}, \frac{p_{n+1}}{Q_{n+1}}$. Как известно (см., напр., А. Я. Хинчин [15]), имеем:

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\ (n \geqslant 3),\ Q_n \geqslant 2Q_{n-2};\ Q_n \geqslant 2^{\frac{n-1}{2}};$$

$$\left| \frac{p_n}{Q_n} - \frac{p_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Далее, если задано любое $\tau > 1$, и Q_n наибольшее из чисел Q_i, не превосходящих τ, то:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{Q_n} \right| \leqslant \frac{1}{Q_n \tau}. \quad (9.4)$$

Рассмотрим ряд знаменателей подходящих дробей:

$$Q_1,\ Q_2, \ldots, Q_n,\ Q_{n+1}. \quad (9.5)$$

С помощью ряда (9.5) построим числа:

$$\eta'_n = \frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} + \cdots + \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \cdots Q_{n+m}} + \cdots, \quad (9.6)$$

где целые числа ξ_{in} последовательно определяются следующим образом:

$$\xi_{0n} = 1; \quad \xi_{1n} + \xi_{0n} Q_{n+1} \equiv 0 \pmod{Q_n};$$
$$0 \leqslant \xi_{1n} < Q_n;\ \xi_{2n} + \xi_{1n} Q_{n+2} + \xi_{0n} Q_{n+1} Q_{n+2} \equiv 0 \pmod{Q_n Q_{n+1}},$$

$0 \leqslant \xi_{2n} < Q_n Q_{n+1}$. Если $\xi_{0n}, \ldots, \xi_{n-1,\,n}$ определены, то ξ_{mn} определяется сравнением:

$$\xi_{mn} + \xi_{m-1,\,n}Q_{n+m} + \xi_{m-2,\,n}Q_{n+m-1}Q_{n+m} + \cdots$$
$$+ \xi_{0n}Q_{n+1}Q_{n+2}\cdots Q_{n+m} \equiv 0 \pmod{Q_nQ_{n+1}Q_{n+m-1}}$$

$0 \leqslant \xi_{mn} < Q_nQ_{n+1}\cdots Q_{n+m-1}$. При таком определении чисел ξ_{in} получим

$$\left|\eta'_n - \frac{\xi_{0n}}{Q_n} - \frac{\xi_{1n}}{Q_nQ_{n+1}} - \cdots - \frac{\xi_{mn}}{Q_nQ_{n+1}\cdot Q_{n+m}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_{n+m+1}} + \frac{1}{Q_{n+m+2}} + \cdots < \frac{32}{Q_{n+m+1}} \qquad (9.7)$$

в силу свойств чисел ξ_{in} и Q_j. При этом $\eta'_n \to 0$. Далее:

$$\frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_nQ_{n+1}} + \cdots + \frac{\xi_{mn}}{Q_nQ_{n+1}\cdots Q_{n+m}} = \frac{a_{mn}}{Q_{mn}}\,;\ (a_{mn} \text{ — целое}) \qquad (9.8)$$

при $n \to \infty$ и $\eta'_n > 0$ при всех n. Число η_0 будет выбираться как одно из чисел η'_n.

10. Обратимся к $U(t)$ и будем исследовать ее малые значения. Пусть в некоторой точке t имеем:

$$|U(t)| \leqslant \exp(\zeta - 1)\,\sigma_0 = \xi_0, \qquad (10.1)$$

причем

$$\zeta = 4\eta_0 \qquad (10.2)$$

и $\nu \in (0, 1)$ как-либо фиксировано. Из (9.2) выводим:

$$\lambda_1 \sin^2\frac{t}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1)\,\sigma_0 \cdot \sin^2\frac{\alpha t}{2} = B\exp(4\eta_0 - 1)\,\sigma_0. \qquad (10.3)$$

Отсюда, как и в п. 5, выводим:

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| = B\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right);\quad \left|\sin\frac{\alpha t}{2}\right| = B\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right) \qquad (10.4)$$

$$\left.\begin{aligned} t &= 2k_1\pi + v_1; \quad v_1 = B\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right)\\ \alpha t &= 2k_2\pi + v_2; \quad v_2 = B\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\cdot\sigma_0\right)\end{aligned}\right\} \qquad (10.5)$$

Пусть $\tau > 1$ заданное число; Q_n наибольшее из чисел (9.5), не превышающее τ; $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$, так что

$$\alpha = \frac{l}{q} + \frac{\theta}{q\tau};\quad |\theta| \leqslant 1;\quad q \leqslant \tau;\quad (l, q) = 1. \qquad (10.6)$$

Подставляя (10.6) в (10.5) и умножая на q, найдем

$$\left.\begin{aligned} qt &= 2k_1q\pi + Bq\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right),\\ pt &= 2k_2q\pi + \frac{\theta|t|}{\tau} + Bq\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right)\end{aligned}\right\} \qquad (10.7)$$

Числа p и q взаимно простые; поэтому найдутся a и b такие, что $ap - bq = 1$, $0 < a < q$, $0 < b < p < q$; при этом из (10.7) следует:

$$t = 2\pi q(k_2a - k_1b) + Bqb\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right) + Bqa\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right) + \theta\frac{|t|a}{\tau}. \qquad (10.8)$$

Обозначим далее:

$$\min\left(\frac{\alpha-4\eta_0}{4}, \frac{1-\alpha}{4}\right)=\beta; \quad \beta_1=0{,}99\beta \tag{10.9}$$

$\beta>\min\left(\frac{\alpha}{8}, \frac{1-\alpha}{4}\right)>0$, так как $\eta_0<\frac{\alpha}{8}$. Положим далее:

$$\tau=\exp(\beta_1\sigma_0). \tag{10.10}$$

Тогда из (10.8) получаем:

$$t=2\pi q(k_2a-k_1b)+B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right)+\theta\frac{|t|a}{\tau}. \tag{10.11}$$

Мы будем рассматривать большие значения σ_0, начиная со значения, определяемого большим значением параметра X_0. Такие σ_0 (и отвечающие им x в выражении (4.2)) будем разбивать на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$:

$$\sigma_0\in\mathfrak{A}_1, \quad \text{если } q\leqslant\tau^{10^{-5}},$$
$$\sigma_0\in\mathfrak{A}_2, \quad \text{если } q>\tau^{10^{-5}}.$$

Рассмотрим сперва поведение $\psi(z)e^{-zx}$ при t, удовлетворяющих (10.1), и $\sigma_0\in\mathfrak{A}_2$. Будем впредь считать, что η_0 выбрано в классе чисел η_n' так, что:

$$0<\eta_0<10^{-10}\beta_1. \tag{10.12}$$

11. Пусть

$$|t|\leqslant\sqrt{q}. \tag{11.1}$$

В силу того, что $\sigma_0\in\mathfrak{A}_2$, при достаточно большом σ_0, q велико:

$$q\geqslant\exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0). \tag{11.2}$$

Поэтому, при достаточно большом σ_0, выводим из (11.1) и (10.11)

$$k_1a-k_2b=0. \tag{11.3}$$

Так как a и b взаимно просты, имеем: $k_1=k_3b$; $k_2=k_4a$ (k_3, k_4 целые); $k_3=k_4$.

Из равенств (10.5) выводим:

$$t=2k_3b\pi+v_1; \quad \alpha t=2k_3a\pi+v_2. \tag{11.4}$$
$$(v_1,\ v_2 \text{ малы}).$$

Докажем теперь, что t должно быть мало. Для этого рассмотрим поведение чисел a и b. Если $b\geqslant q^{2/3}$, то, в силу (11.1) при большом σ_0 (что будем предполагать), из (11.4) следует: $k_3=0$, $t=v_1$. Если $b<q^{2/3}$, то $a=\frac{1+bq}{p}<\frac{4}{\alpha}b<\frac{4}{\alpha}q^{2/3}$ и из (10.11) и (11.3) выводим:

$$t=B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right)+\theta|t|q^{-1/3},$$

откуда:

$$t=B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right).$$

Итак, мы вывели, что при $\sigma_0\in\mathfrak{A}_2$ и $|t|\leqslant\sqrt{q}$ соотношение (10.1) приводит к оценке:

$$t = B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + B\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right) = B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right). \qquad (11.5)$$

Итак, имеем: при $|t| \leqslant \sqrt{q}$ имеет место (11.5), либо

$$|U(t)| > \exp\left[(4\eta_0 - 1)\sigma_0\right] = \xi_0. \qquad (11.6)$$

При t, удовлетворяющих (11.5), имеем из (9.2);

$$U(t) = \frac{\lambda_1}{4} t^2 (1 + B\Delta(\sigma_0)). \qquad (11.7)$$

Отсюда видно, что $U(t) \geqslant 0$ при $|t| \leqslant \sqrt{q}$, ибо если бы $U(t)$ меняло знак в точке $t_0 \neq 0$, то $U(t_0) = 0$, t_0 было бы малым, и $U(t_0)$ выражалось бы формулой (11.7), так что было бы $U(t_0) \neq 0$, что противоречиво. Если же $t_0 = 0$, то в окрестности t_0 имело бы место (11.7) и не могла бы происходить перемена знака.

Далее, из (9.3), (4.8) и (4.10) находим;

$$V(t) = \frac{t^3}{6} V'''(\theta t) = Be^{\sigma_0}|t|^3. \qquad (11.8)$$

Из (11.7) выводим: при $\exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1 - 1)\right] < |t| < c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right)$, где ζ_1 — какая-либо константа: $\zeta_1 \in (\eta_0; 0, 01)$,

$$U(t) = \frac{\lambda_1}{4}\exp\left[\sigma_0(\zeta_1 - 1)\right](1 + B\Delta(\sigma_0)) > \frac{\lambda_1}{8}\exp\left[\sigma_0(\zeta_1 - 1)\right]. \qquad (11.9)$$

Если же $|t| \leqslant \exp\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1 - 1)$, то

$$V(t) = B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \qquad (11.10)$$

Вернемся теперь к интегралу вида (6.5)

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)\, e^{-zx} dt, \qquad (11.11)$$

где $\psi(z)\, e^{-zx}$ определяется формулой (9.1); предполагаем, что $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$. Разобьем ось изменения t на области:

$$D_q : |t| > \sqrt{q};\quad T_{1q} : c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) < |t| \leqslant \sqrt{q};$$

$$T_{2q} : \exp\left(-0{,}99\,\frac{\sigma_0}{2}\right) \leqslant |t| \leqslant c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right);\ T_{0q} : |t| \leqslant \exp\left(-0{,}99\,\frac{\sigma_0}{2}\right);$$

соответствующие части интеграла (11.11) назовем

$$J(D_q);\ J(T_{1q}),\ J(T_{2q}),\ J(T_{0q}).$$

Оценим $J(D_q)$. Так как $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$, то

$$q > \tau^{10^{-5}} > \exp\left(10^{-5}\beta_1\sigma_0\right). \qquad (11.12)$$

Далее, из (9.2) очевидно, что при любом t

$$|\psi(z)\,e^{-zx}| \leqslant \exp[U_0(x)]\exp[\nu\exp[\eta_0\sigma_0]]. \tag{11.13}$$

Таким образом,

$$J(D_q) = B\exp[U_0(x)]\exp[\nu\exp(\eta_0\sigma_0)]\int\limits_{\sqrt{q}}^{\infty}\exp(-\gamma t^2)\,dt =$$

$$= B\exp[U_0(x)]\exp[\nu\exp(\eta_0\sigma_0)]\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\,q\right]. \tag{11.14}$$

Учитывая (10.13) и (11.12), находим для (11.14) оценку:

$$J(D_q) = B\exp[U_0(x)]\exp\left[\nu\exp(\eta_0\sigma_0) - \frac{\gamma}{2}\,\exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)\right] =$$

$$= B\exp[U_0(x)]\exp\left[-\frac{\gamma}{4}\exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)\right]. \tag{11.15}$$

12. Рассмотрим теперь $J(T_{1q})$. Из п. 11 явствует, что в области T_{1q}

$$U(t) > \exp(4\eta_0 - 1)\,\sigma_0. \tag{12.1}$$

Отсюда:

$$J(T_{1q}) = B\exp[U_0(x)]\exp[-2\exp(4\eta_0\sigma_0)]. \tag{12.2}$$

Переходим к $J(T_{2q})$. В силу (11.10) в области T_{2q} имеем:

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8}\exp(-0{,}99\sigma_0).$$

Отсюда:

$$J(T_{2q}) = B\exp[U_0(x)]\exp(-\exp 0{,}01\sigma_0). \tag{12.3}$$

Наконец, в области $T_{0\overline{q}}$, полагая $\xi_1 = \exp\left(-0{,}99\,\frac{\sigma_0}{2}\right)$, имеем

$$J(T_{0q}) = \frac{1}{2\pi}\exp[U_0(x)]\int\limits_{|t|\leqslant\xi_1}\exp(-\gamma t^2)\exp\left[-\frac{\lambda_1}{2}\,e^{\sigma_0 t^2}(1 + B\Delta(\sigma_0))\right]\times$$

$$\times\exp\left[B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2}\right)\right]dt.$$

При достаточно большом σ_0 (что, как обычно, предполагается), можно заменить три подынтегральных множителя соответственно оценками снизу: $\frac{1}{2}$, $\exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0 t^2})$, $\frac{1}{2}$,

так что:

$$J(T_{0q}) > \frac{1}{8\pi}\exp[U_0(x)]\int\limits_{|t|\leqslant\xi_1}\exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0 t^2})\,dt > c_3\exp[U_0(x)]\,e^{-\sigma_0/2}. \tag{12.4}$$

Сопоставляя (12.4), (12.3), (12.2) и (11.15), находим:

$$g_\nu(x) > \frac{c_3}{2}\exp[U_0(x)]\,e^{-\sigma_0/2} > 0 \tag{12.5}$$

для $\nu \in (0,1)$; $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$; при достаточно большом x (а следовательно и σ_0).

13. Теперь переходим к случаю: $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_1$. Здесь имеем:

$$q \leqslant \tau^{10^{-5}}. \tag{13.1}$$

Положение будет сходно со случаем рационального α, разобранным ранее. Здесь, однако, в силу иррациональности α, q не будет фиксированным числом, а необходимо $q \to \infty$ при возрастании x, а вместе с ним σ_0 и τ. При данном (большом) $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_1$ и соответствующем по формуле (10.11) τ ось изменения t разбиваем на множества:

$$D_\tau : |t| \geqslant \tau^{0,01} \tag{13.2}$$

и

$$T_\tau : |t| < \tau^{0,01}. \tag{13.3}$$

Соответствующие части интеграла (11.11) обозначим $J(D_\tau)$ и $J(T_\tau)$. Займемся сперва $J(D_\tau)$. В силу оценки (11.13), верной для любого t, находим:

$$J(D_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0 \sigma_0)] \int_{\tau^{0,01}}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\, dt.$$

Совершенно так же, как в п. 11 (формулы (11.14), (11.15)), получаем оценку:

$$J(D_\tau) = B \exp(U_0(x)) \exp\left[-\frac{\gamma}{4} \exp(0{,}01\beta_1\sigma_0)\right]. \tag{13.4}$$

Теперь пусть $t \in T_\tau$, так что верно (13.3). Обратимся к формуле (10.11). Здесь $0 < a < \tau^{10^{-5}}$, так что получаем: если верно (10.1), то $t = 2\pi qk + \tau^{-0,01} + \theta \cdot t \cdot \tau^{10^{-5}-1}$; k — целое число. Отсюда:

$$t = 2\pi qk + B\tau^{-0,01}. \tag{13.5}$$

Полагая $t - 2\pi qk = v$, видим, что (10.1) приводит к соотношениям:

$$|t - 2\pi qk| = |w| \leqslant c_4 \tau^{-0,01}. \tag{13.6}$$

Обратимся к (9.1) — (9.3). Число q есть одно из чисел ряда (9.5). Мы можем считать, что $q > K_0$, где K_0 — любая назначенная нами константа (от этого будет зависеть выбор параметров X_0, ν, η_0). Если Q_{n_0} — наименьшее число ряда (9.5), большее K_0, то полагаем впредь: $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ (см. (9.6)); при этом n_0 должно быть столь большим, чтобы η_0 было достаточно малым, в частности, удовлетворяло (10.12). Пусть теперь $q = Q_n$; $n \geqslant n_0$. Из (8.8) и (9.7) выводим:

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\theta}{Q_{n+1}}; \quad l, q \text{ — целые.}$$

Но мы имеем: $q = Q_n < \tau$; $Q_{n+1} > \tau$. В силу (13.1)

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\theta}{\tau}; \quad q \leqslant \tau^{10^{-5}}. \tag{13.7}$$

При выбранном и теперь уже фиксированном значении $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ и t, подчиняющемся условию (13.6), рассмотрим поведение $U(t)$ и $V(t)$

(см. (9.2) и (9.3)). Имеем в области T_τ

$$\frac{\eta_0 t}{2} = \frac{lt}{2q} + \frac{16\theta t}{\tau};\ |t| \leqslant \tau^{0.01}. \tag{13.8}$$

Мы имеем далее: $\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$. Здесь $(p, q) = 1$. Кроме того, $0 < l < \frac{p}{2}$, ибо $\eta_0 < \frac{\alpha}{8}$. Имеем далее:

$$\frac{\alpha t}{2} = \frac{pt}{2q} + \frac{\theta t}{2q\tau} \tag{13.9}$$

($|\theta| \leqslant 1$; θ не всегда одно и то же). Рассмотрим значения $t \in T_\tau$ под условиями (13.6). Имеем:

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{w}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1)\sigma_0 \cdot \sin^2\left(\frac{p}{q}\frac{w}{2} + \frac{\theta t}{2q\tau}\right) - \\ - \nu \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0 \cdot \sin^2\left(\frac{l}{q}\frac{w}{2} + \frac{16\theta_1 t}{\tau}\right). \tag{13.10}$$

Докажем неравенство: в условиях (13.6)

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8} w^2 + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\tau_0}{200}\right). \tag{13.11}$$

В самом деле:

$$\sin^2\left(\frac{l}{q}\frac{w}{2} + \frac{16\theta t}{\tau}\right) = B\left(v + \frac{t}{\tau}\right)^2 = B\tau^{-0,02} = B\exp(-0,02\beta\sigma_0). \tag{13.12}$$

Из (13.10), (13.12) и (10.12) следует (13.11).

14. Из (13.11) выводим: при $|w| \geqslant \exp\left[(\zeta - 1)\frac{\sigma_0}{2}\right]$ имеем ($\zeta > 0$ константа)

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{16} \exp[(\zeta - 1)\sigma_0]. \tag{14.1}$$

Таким образом, $U(t)$ может не подчиняться неравенству (14.1) лишь для таких t, в условиях (13.6), для которых

$$|w| \leqslant \exp(\zeta - 1)\frac{\sigma_0}{2} = \xi_0. \tag{14.2}$$

Обозначим теперь: $T_{\tau q} \subset T_\tau$ множество точек t, входящих в T_τ и подчиненных условию (14.2), т. е.

$$|t - 2\pi q k| \leqslant \xi_0, \tag{14.3}$$

$T'_\tau = T_\tau - T_{\tau q}, T_{\tau q 0}$—множество точек $t \in T_{\tau q}$, где $k = 0$, т. е.

$$|t| \leqslant \xi_0 \tag{14.4}$$

$T_{\tau q 1} = T_{\tau q} = T_{\tau q 0}$, т. е. множество точек $t \in T_\tau$ под условием (14.3), где $k \neq 0$. Соответствующие интегралы от $\psi(z)e^{-zx}$ обозначим $J(T'_\tau), J(T_{\tau q 0})$, $J(T_{\tau q 1})$. Оценим сперва $J(T'_\tau)$. Имеем согласно (14.1), и (9.1) на T'_τ:

$$|\psi(z)e^{-zx}| = B\exp(-\gamma t^2)\exp\left(-\frac{\lambda_1}{8}\exp\zeta\sigma_0\right)\exp[U_0(x)]. \tag{14.5}$$

Отсюда:

$$J(T'_\tau) = B\exp[U_0(x)]\exp[-c_5\exp\zeta\sigma_0]. \tag{14.6}$$

Мы приняли, что $q \geqslant K_0$, где, как говорилось ранее, K_0 — выбранная нами по параметрам γ, α достаточно большая костанта. Исходя из этого, оценим $|J(T_{\tau q1})|$ через K_0. Согласно (13.11) и (9.1), имеем:

$$J(T_{\tau q1}) = B\exp[U_0(x)]\cdot\sum_{k\neq 0}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\cdot 4\pi^2q^2k^2\right)\times$$

$$\times\int\limits_{|w|\leqslant\xi_0}\exp\left[-2e^{\sigma_0}\left(w^2+B\exp\left(-\sigma_0-\frac{\tau}{200}\right)\right)\right]dw. \tag{14.7}$$

Интеграл в (14.7), очевидно, равен следующему

$$\int\limits_{|w|\leqslant\xi_0}\exp(-2e^{\sigma_0}w^2)\left(1+B\exp\left[-\frac{\tau}{200}\right]\right)dw = Be^{-\sigma_0/2}. \tag{14.8}$$

Таким образом:

$$J(T_{\tau q1}) = B\exp[U_0(x)]\,e^{-\sigma_0/2}\sum_{k\neq 0}\exp(-2\gamma\pi^2k^2q^2).$$

Если $K_0 > \frac{K_1}{\sqrt{\gamma}}$, то $\sum\limits_{k\neq 0}\exp(-2\gamma\pi^2k^2q^2) < \exp(-K_1^2)$, так что

$$J(T_{\tau q1}) = B\exp[U_0(x)]\,e^{-\sigma_0/2}\exp(-K_1^2). \tag{14.9}$$

При этом ограниченная функция B в (14.9) имеет оценку модуля сверху, не зависящую от K_1.

15. Интеграл $J(T_{\tau q0})$ оценим снизу. Из (14.4) находим:

$$U(t) = t^2\left\{\frac{\lambda_1}{4}+\lambda_2\frac{\alpha^2}{4}\exp(\alpha-1)\sigma_0-\nu\frac{\eta_0^2}{4}\exp(\eta_0-1)\sigma_0\right\}(1+Bt). \tag{15.1}$$

Далее,

$$V(t) = V(0)+V'(0)\,t+V''(0)\frac{t^2}{2}+V'''(\theta t)\frac{t^3}{6}$$

при $t\in T_{\tau q0}$. Из (4.10) видим, что $V'(0)=V''(0)=0$; $V'''(t)=Be^{\sigma_0}$; из (9.3) явствует, что $V(0)=0$. Поэтому

$$V(t) = Be^{\sigma_0}\xi_0^3 = B\exp\left(\frac{3}{2}\zeta_0-\frac{1}{2}\right).$$

Будем считать $\zeta = 10^{-3}$. Тогда

$$V(t) = B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \tag{15.2}$$

Отсюда

$$J(T_{\tau q0}) > \frac{1}{2}\exp[U_0(x)]\cdot\int\limits_{|t|\leqslant\xi_0}\exp(-\lambda_1e^{\sigma_0}t^2)\left(1+B\exp\left[-\frac{\sigma_0}{4}\right]\right)dt >$$

$$> c_6e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]. \tag{15.3}$$

Сопоставляя (15.3), (14.9), (14.6) и (13.4), видим, что если константа K_1 в (12.9) была заранее выбрана достаточно большой, то

$$g_\nu(x) > \frac{1}{2} c_6 e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \tag{15.4}$$

при $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_1$ достаточно большом, и $\nu \in (0,1)$. Как известно из предыдущего, выбирая достаточно малое $\nu > 0$, можно сделать $g_\nu(x) > 0$ при $|x| \leqslant X_0$; $X_0 > 1$ можно заранее выбрать сколь угодно большими. Далее, при $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$ и достаточно большом, имеем (12.5). При $x < -X_0$ также имеем $g_\nu(x) > 0$. Это и доказывает основную лемму II.

16. Переходим к доказательству основной леммы III. Обратимся к (2.6). $G(u)$ в (2.6) — непрерывная неубывающая функция. Обозначим:

$$G(1) - G(\beta) = \Delta_0 > 0.$$

Рассмотрим производные числа Дини функции $G(u)$ на сегменте $[\beta, 1]$ (см., напр., [15], стр. 97—98). Нам будет нужна лемма ([15], стр. 97—98): пусть $f(u)$ непрерывна в интервале (a, b), l и L точные верхняя и нижняя грани какого-либо одного из четырех производных чисел Дини $f(u)$. Тогда

$$l \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant L.$$

Пусть $(a, b) \subset [\beta, 1]$ такой интервал, что $G(b) - G(a) > 0$; в силу непрерывности $G(u)$ он должен существовать при a и b достаточно близких к числам β и 1.

Очевидно, все четыре производные числа Дини (допускающие, как известно, и бесконечное значение) неотрицательны, так что $l \geqslant 0$. Рассмотрим левое нижнее производное число Дини:

$$\lambda'_u = \varliminf_{h \to +0} \frac{G(u) - G(u-h)}{h}.$$

Пусть $L = \sup_u \lambda'_u$ $(L \leqslant \infty)$. Тогда $L > 0$. В самом деле, будь $L = 0$, то ввиду того, что $l = 0$, из вышеуказанной леммы следовало бы, что $G(b) - G(a) = 0$, что невозможно. Итак, должна существовать точка $u_0 \in [\beta, 1]$, где $\lambda'_{u_0} > 0$. Легко видеть, что существует константа $c > 0$ такая, что при достаточно малых $h > 0$, $h \leqslant h^{(0)}$

$$G(u_0) - G(u_0 - h) > ch. \tag{16.1}$$

Рассмотрим сегмент I_0: $[u_0 - h^{(0)}, u_0] \subset [\beta, 1]$.

Выберем $h^{(1)}$ столь малым, что:

$$1 - 10^{-10} < \frac{u_0 - h^{(1)}}{u_0} < 1; \quad h^{(1)} < h^{(0)}. \tag{16.2}$$

Пусть $G(u_0) - G(u_0 - h^{(1)}) = \Delta_1 > 0$. В силу непрерывности $G(u)$ можно выбрать $h^{(2)}$ так, что $G(u_0) - G(u_0 - h^{(2)}) = \frac{\Delta_1}{2}$; $h^{(2)} < h^{(1)}$. Тогда $G(u_0 - h^{(2)}) - G(u_0 - h^{(1)}) = \frac{\Delta_1}{2}$.

Рассмотрим сегменты $I_1 : [u_0 - h^{(2)}, u_0]$; $I_2 : [u_0 - h^{(1)}, u_0 - h^{(2)}]$.

Положим $\frac{u}{u_0} = v$; $u = vu_0$; $G(u) = G(u_0 v) = G_1(v)$. Тогда сегменты I_1 и I_2 превратятся в сегменты изменения v: $I_1' = [1 - h_1^{(2)}, 1]$; $I_2' = [v^{(1)}, v^{(2)}]$, где: $\frac{h^{(2)}}{u_0} = h_1^{(2)}$; $v^{(1)} = 1 - \frac{h^{(1)}}{u_0}$; $v^{(2)} = 1 - \frac{h^{(2)}}{u_0}$. Из (16.1) вытекает неравенство для $G_1(v)$:

$$G_1(1) - G_1(1-h) > \frac{c}{u_0} h \tag{16.3}$$

при $h \leqslant \frac{h^{(0)}}{u_0}$. Кроме того, $G_1(1) - G_1(1 - h_1^{(2)}) = \frac{\Delta_1}{2}$; $G(v^{(2)}) - G(v^{(1)}) = \frac{\Delta_1}{2}$, и в силу (16.2)

$$1 - 10^{-10} < 1 - v^{(2)} < 1. \tag{16.4}$$

Теперь осуществим в сегменте I_2' следующую конструкцию: задается большое число S_0. На сегменте I_2' отмечаем все рациональные дроби $\frac{r}{s}$ со знаменателями $1 < s \leqslant S_0$. Возле каждой из них опишем интервал $\left(\frac{r}{s} - \delta_{\frac{r}{s}}, \frac{r}{s} + \delta_{\frac{r}{s}}\right)$, где $\delta_{\frac{r}{s}}$ избраны так, что сумма приращений $G_1(v)$ по этим интервалам не превосходит $\frac{\Delta_1}{4}$.

В оставшейся системе сегментов выберем сегмент $I_2^{(S_0)}$ такой, что приращение $G_1(v)$ на нем равно $\Delta_2 > 0$ (что, очевидно, возможно). На сегменте $I_2^{(S_0)}$ к функции $G_1(v)$ применяем то же рассуждение о левом нижнем производном числе Дини, что и раньше. Оно доказывает, что найдется число $\alpha \in I_2^{(S_0)}$ такое, что:

$$G_1(\alpha) - G_1(\alpha - h) > c'h \tag{16.5}$$

при $0 < h < h^{(3)}$; $c' > 0$ константа.

17. Дальнейшие рассуждения будут вестись о сегментах I_1' и сегменте $[\alpha - h^{(3)}, \alpha]$. Эти сегменты переобозначим π_1 и $\pi(S_0)$; переобозначим также $h_1^{(2)} = h_0$, $h^{(3)} = \rho_0$, так, что будет

$$\pi_1 = [1 - h_0, 1]; \quad \pi(S_0) = [\alpha - \rho_0, \alpha], \tag{17.1}$$

Теперь введем новую случайную величину X_0 такую, что:

$$\varphi_0(z) = \mathbf{E} \exp(zX_0) = \exp\left(\gamma z^2 + \int_{\pi_1} (e^{zv} - 1)\, dG_1(v) + \int_{\pi(S_0)} (e^{zv} - 1)\, dG_1(v)\right). \tag{17.2}$$

Мы будем доказывать сначала, что при достаточно малом $\nu_0 > 0$ и подходяще выбранном малом $\eta_0 < 0$, функция

$$\psi_0(z) = \varphi_0(z) \exp(-\nu_0 (e^{\eta_0 z} - 1)) \tag{17.3}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y. Положим далее

$G_1(1+v)=\Lambda(v)$; $G_1(\alpha+v)=\Lambda_1(v)$. Тогда

$$\int_{\pi_1}(e^{zv}-1)\,dG_1(v)=\int_{-h_0}^{1}(e^{z(1+v)}-1)\,d\Lambda(v), \tag{17.4}$$

$$\int_{\pi(S_0)}(e^{zv}-1)\,dG_1(v)=\int_{-\rho_0}^{\alpha}(e^{z(\alpha+v)}-1)\,d\Lambda_1(v). \tag{17.5}$$

Считая $x\geqslant X_0$ ($X_0>1$ большое), находим точку перевала $\sigma_0=\sigma_0(x)$ соответственно (4.2), и полагаем, как и ранее, $z=\sigma_0+it$. Положим далее:

$$h(\sigma_0)=\int_{-h_0}^{0}e^{\sigma_0 v}d\Lambda(v) \tag{17.6}$$

и $\nu_0\in(0,1)$. Получим в обозначениях, аналогичных (7.1)—(9.3),

$$\psi_0(z)\,e^{-zx}=\exp[U_0(x)]\exp[-\gamma t^2]\exp[-2e^{\sigma_0}U(t)]\exp[iV(t)], \tag{17.7}$$

$$U(t)=\int_{-h_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t(1+v)}{2}\,d\Lambda(v)+\exp(\alpha-1)\sigma_0\int_{-\rho_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t(\alpha+v)}{2}\times$$
$$\times\,d\Lambda_1(v)-\nu_0\exp(\eta_0-1)\,\sigma_0\sin^2\frac{\eta_0 t}{2}, \tag{17.8}$$

$$V(t)=e^{\sigma_0}\int_{-h_0}^{0}\sin t(1+v)\,d\Lambda(v)+e^{\alpha\sigma_0}\int_{-\rho_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin t(\alpha+v)\,d\Lambda_1(v)-$$
$$-\nu_0\sin(\eta_0 t)+t(2\gamma_0\sigma_0-x). \tag{17.9}$$

Полагая $\Delta=\int_{-h_0}^{0}d\Lambda(v)$, из (17.6) находим:

$$h(\sigma_0)\leqslant\int_{-h_0}^{1}d\Lambda(v)=\Delta. \tag{17.10}$$

В дальнейшем a_0, $a_1,\ldots$ будут означать положительные константы; ζ_0, $\zeta_1,\ldots$ малые положительные константы, $K_0, K_1,\ldots$ большие положительные константы; σ_0 будет считаться достаточно большим.

Имеем

$$h(\sigma_0)=\int_{-h_0}^{1}e^{\sigma_0 v}d\Lambda(v)>\frac{a_0}{\sigma_0}. \tag{17.11}$$

В самом деле, при достаточно большом σ_0 имеем:

$$h(\sigma_0)>\frac{1}{e}\int_{-\frac{1}{\sigma_0}}^{0}d\Lambda(v)>\frac{a_0}{\sigma_0}\ \text{в силу (16.3).}$$

Пусть, далее, $R(\sigma_0)=4\ln\sigma_0$; $h_1(\sigma_0)=\dfrac{R(\sigma_0)}{\sigma_0}$.

Тогда

$$\int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)}e^{\sigma_0 v}d\Lambda(v)<\exp[-R(\sigma_0)]\int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)}d\Lambda(v)<\frac{\Delta}{\sigma_0^4}<\frac{1}{2}\frac{a_0}{\sigma_0}.$$

В силу (17.11) отсюда выводим:

$$\int\limits_{-h_1(\sigma_0)}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v) > \frac{1}{2} h(\sigma_0). \tag{17.12}$$

Совершенно аналогично трактуется интеграл $\rho(\sigma_0) = \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda_1(v)$. Имеем:

$$\rho(\sigma_0) \geqslant \frac{a_0}{\sigma_0}; \quad \int\limits_{-h_1(\sigma_0)}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda_1(v) > \frac{1}{2} \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda_1(v) = \frac{1}{2}\rho(\sigma_0). \tag{17.13}$$

Нам нужно будет еще очевидное равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\xi^2 e^{\sigma_0} \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v)\Big] d\xi = a_1 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}. \tag{17.14}$$

18. Рассмотрим теперь те значения $U(t)$, для которых

$$|U(t)| < K_1 e^{-\sigma_0 \cdot \sigma_0}. \tag{18.1}$$

Из (17.8) находим:

$$0 < \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) + \exp(\alpha - 1)\,\sigma_0 \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \cdot \sin^2 \frac{t(\alpha+v)}{2}\, d\Lambda_1(v) =$$

$$= B\gamma_0 \exp(\eta_0 - 1)\,\sigma_0. \tag{18.2}$$

При этом, в силу (16.4), $1 - \alpha \leqslant 10^{-10}$; мы будем считать взятым в интервале $(0, 10^{-10})$. Докажем, что

$$\left|\sin \frac{t}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\Big(-\sigma_0 \frac{1-\eta_0}{3}\Big) \sigma_0^{\frac{1}{3}} = \xi_1. \tag{18.3}$$

Пусть это не так, и $\left|\sin \frac{t}{2}\right| > \xi_1$. Так как $\left|\frac{d}{dt} \sin \frac{t}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, то имели бы:

$$\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \cdot \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) > \frac{\xi_1^2}{4} \int\limits_{-\frac{\xi_1}{2}}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v) >$$

$$> \frac{1}{2} \frac{\xi_1^2}{4} \int\limits_{\frac{-\xi_1}{2}}^{0} d\Lambda(v) > \frac{a_0}{8} \xi_1^3 \text{ в силу (16.3).}$$

Далее, $\xi_1^3 = K_1^3 \exp[-\sigma_0(1-\eta_0)]\,\sigma_0$ и полученное неравенство противоречит (18.2). Этим (18.3) доказано. Аналогично из (18.1) следует:

$$\left|\sin \frac{at}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\Big(-\sigma_0 \frac{\alpha - \eta_0}{3}\Big) \sigma_0^{\frac{1}{3}} = \xi_2, \tag{18.4}$$

причем $\xi_2 = \xi_1 \exp \frac{1-\alpha}{3}\sigma_0$; $1 - \alpha \leqslant 10^{-10}$.

19. Дальнейшие рассуждения будут зависеть от того, является ли α рациональным или иррациональным числом. Начнем со случая рационального $\alpha = \frac{p}{q}$ $\left(\text{дробь } \frac{p}{q} \text{ несократима}\right)$. При этом, в силу (16.4), $0 < p < q$. Далее, по конструкции сегмента $\pi(S_0)$, должно быть

$$q > S_0, \tag{19.1}$$

ибо все рациональные числа с меньшими знаменателями были выброшены. Выбираем

$$\eta_0 = \frac{1}{q}, \tag{19.2}$$

считая $S_0 > 10^{20}$.
Из (18.4) и (18.5) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{t}{2} &= \theta\xi_2 \\ \sin\frac{t}{2}\frac{p}{q} &= \theta_1\xi_2 \end{aligned}\right\}. \tag{19.3}$$

Отсюда, в силу взаимной простоты p и q, как и ранее, выводим:

$$t = 2\pi kq + 2\theta q^2\xi_2 = 2\pi qk + \theta\xi_3 \tag{19.4}$$

(k целое; $|\theta_i| \leqslant 1$; θ не всегда одно и то же), или

$$t = 2\pi kq + w;\ |w| \leqslant \xi_3. \tag{19.5}$$

Пусть $U(t)$ подчиняется (18.1). Тогда для t имеем соотношение (19.5) и t подчиняется (19.4). Имеем:

$$t\cdot\frac{1+v}{2} = k\pi qv + \frac{w}{2}(1+v) + \pi kq,$$
$$\frac{t}{2}\left(\frac{p}{q}+v\right) = k\pi qv + \frac{w}{2}\left(\frac{p}{q}+v\right) + \pi kp.$$

Таким образом, $\frac{t}{2}(1+v) - \frac{t}{2}\left(\frac{p}{q}+v\right) = \frac{w}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right) + \pi k(q-p)$ при любом значении v. Отсюда видно, что при w под условием (19.5) либо $\sin^2\frac{t}{2}(1+v)$, либо $\sin^2\frac{t}{2}(\alpha+v)$ будет не меньше $\frac{w^2}{16}$. Далее $\sin^2\frac{\eta_0 t}{2} = \sin^2\frac{t}{2q} = \sin^2\frac{w}{2q} = \frac{w^2}{4q^2}(1+B|w|)$.
Поэтому из (17.8) следует:

$$U(t) > w^2\left(\frac{1}{16}\exp\left[(\alpha-1)\sigma_0\right]\right)\frac{\sigma_0}{\sigma_0} - \nu_0\frac{1}{2q^2}\exp\left(\frac{1}{q}-1\right)\sigma_0 > \\ > w^2(a_2\exp(\alpha-1)\sigma_0)\cdot\frac{1}{\sigma_0}. \tag{19.6}$$

Отсюда мы выводим прежде всего, что $U(t) \geqslant 0$ при всех t, ибо если $U(t_1) = 0$, то в окрестности t_1 функция $U(t)$ не может менять знак. Далее, если имеет место (18.1), то из (19.6) заключаем:

$$w^2\cdot a_2\frac{1}{\sigma_0}\exp(\alpha-1)\sigma_0 < K_2 e^{-\sigma_0}\cdot\sigma_0;$$

$$|w| \leqslant \frac{K_2^{\frac{1}{2}}}{a_2^{\frac{1}{2}}}\cdot\sigma_0\cdot\exp\left(-\frac{\alpha\sigma_0}{2}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha-\xi_0}{2}\sigma_0\right) = \xi_4. \tag{19.7}$$

Теперь, считая S_0 и, стало быть, q достаточно большим, разберем поведение интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t-2\pi qk|\leqslant\xi_4}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt$. Мы будем считать $k\neq 0$.

Если

$$|k|\geqslant 4\sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}, \tag{19.8}$$

то

$$|t|\geqslant 4\pi q\sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}. \tag{19.9}$$

Ввиду того, что $U(t)\geqslant 0$, из (17.7) находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 4\sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt = B\exp[U_0(x)]\exp(-\pi q\sigma_0). \tag{19.10}$$

Как мы увидим далее, такой величиной можно пренебречь. Рассмотрим поведение $U(t)$ при $|t-2\pi qk|\leqslant\xi_4$ и k, не удовлетворяющем неравенству (19.8).

Обратим внимание на последний член $U(t)$ в (17.8). Он имеет вид $\left(\eta_0=\frac{1}{q};\ w=t-2\pi kq\right)$:

$$-\nu_0 h(\sigma_0)\exp\left(\frac{1}{q}-1\right)\sigma_0\sin^2\frac{w}{2} = B\exp\left(-\frac{3}{2}\sigma_0\right). \tag{19.11}$$

Отсюда

$$-2e^{\sigma_0}U(t) = -2e^{\sigma_0}\left(\int\limits_{-h_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v)+\right.$$

$$\left.+\exp(\alpha-1)\,\sigma_0\int\limits_{-\rho_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(\alpha+v)\,d\Lambda_1(v)\right)+B\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_0\right).$$

Стало быть

$$2e^{\sigma_0}U(t)\geqslant 2e^{\sigma_0}\int\limits_{-h_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v)+B\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_0\right). \tag{19.12}$$

Далее: $\frac{t}{2}(1+v)=\frac{2\pi qk+w}{2}(1+v)=\pi kq+\frac{w}{2}(1+v)+\pi kqv$, и

$$\sin^2\frac{t}{2}\left(1+v\right)=\sin^2\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right).$$

Далее, h_0 было фиксировано, а $q>S_0$, и вся конструкция, связанная с S_0, производится независимо от h_0. При достаточно большом q, и $|k|\geqslant 1$ имеем:

$$\int\limits_{-h_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v)\geqslant\int\limits_{-1/4|k|q}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v). \tag{19.13}$$

Так как $|\pi kqv|\leqslant\frac{\pi}{4}$ в этом случае, то

$$\int\limits_{-1/4|k|q}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v)>\frac{1}{2}\int\limits_{-1/4|k|q}^{0}e^{\sigma_0 v}\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right)^2 d\Lambda(v). \tag{19.14}$$

Из (17.7), (17.8), (17.12), (19.13) и (19.14) имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt\right| = B\exp[U_0(x)]\exp(-\gamma\pi^2k^2q^2).$$

$$\int\limits_{|w|\leqslant\xi_4}\exp\Big[-e^{\sigma_0}\int\limits_{-1/4\,|\,k\,|\,q}^{0}e^{\sigma_0 v}\Big(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\Big)^2\,d\Lambda(v)\Big]\,dw. \qquad (19.15)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-(aw^2+2bw+c)]\,dw,$$

где $aw^2+2bw+c$, определенный квадратный полином с дискриминантом $-D=b^2-ac<0$.

Имеем:

$$J=\frac{a_3}{\sqrt{a}}\exp\Big(-\frac{D}{a}\Big)<\frac{a_3}{\sqrt{a}}. \qquad (19.16)$$

Обращаясь к (19.15), находим:

$$e^{\sigma_0}\int\limits_{-1/4\,|\,k\,|\,q}^{0}e^{\sigma_0 v}\Big(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\Big)^2\,d\Lambda(v)=aw^2+2bw+c,$$

где

$$a=e^{\sigma_0}\int\limits_{-1/4\,|\,k\,|\,q}^{0}e^{\sigma_0 v}\,\frac{(1+v)^2}{2}\,d\Lambda(v). \qquad (19.17)$$

Ввиду этого, последний интеграл в (19.15) имеет оценку сверху:

$$a_3e^{-\frac{\sigma_0}{2}}\Big(\int\limits_{-1/4\,|\,k\,|\,q}^{0}e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)\Big)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (19.18)$$

Обратимся теперь к (17.12). Если σ_0 достаточно велико сравнительно с q (что предполагается), то

$$\frac{1}{4\,|\,k\,|\,q}>\frac{a_4}{\sqrt{\sigma_0 q}}>\frac{4\ln\sigma_0}{\sigma_0}=h_1(\sigma_0) \qquad (19.19)$$

и, в силу (17.12):

$$\int\limits_{-1/4\,|\,k\,|\,q}^{0}e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\int\limits_{-h_1(\sigma_0)}^{0}e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\frac{1}{2}h(\sigma_0),$$

и (19.18) не превосходит

$$a_4e^{-\frac{\sigma_0}{2}}(h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}, \qquad (19.20)$$

а выражение (19.15) не превосходит

$$B\exp[U_0(x)]\,e^{-\frac{\sigma_0}{2}}(h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}\exp(-\gamma\pi^2k^2q^2). \qquad (19.21)$$

20. Суммируя выражения (19.21) по всем k с $|k| \geqslant 1$, получаем оценку

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\pi^2 q^2\right). \tag{20.1}$$

Далее, рассмотрим значения t, для которых (18.1) не выполнено. Так как $U(t) \geqslant 0$, то

$$U(t) > K_1 \cdot e^{-\sigma_0}\sigma_0. \tag{20.2}$$

Если $\mathfrak{A}$ множество таких значений t, то, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{A}} \psi_0(z)\, e^{-zx}\cdot dt = B \exp[U_0(x)] \exp[-2K_1\sigma_0]\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma t^2]\, dt =$$

$$= B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp(-K_1\sigma_0). \tag{20.3}$$

Наконец, остается случай $k = 0$, т. е. интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\xi_4} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt. \tag{20.4}$$

Здесь

$$U(t) < t^2 \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v). \tag{20.5}$$

Далее, согласно (4.10),

$$V(t) = V(0) + V'''(\theta t)\cdot \frac{t^3}{6} \leqslant Be^{\sigma_0\xi_4^3} = B\exp\left(-\frac{1}{4}\sigma_0\right). \tag{20.6}$$

Ввиду этого, из (20.5), (20.6) и (17.7) вытекает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\xi_4} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt > a_5 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \left(\int_{-h_0}^{1} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp[U_0(x)] =$$

$$= a_5 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp[U_0(x)]. \tag{20.7}$$

Сопоставив (20.7), (20.3), (20.1) и (19.10), находим, что при достаточно больших $x > X_0$ (и. стало быть, σ_0) и S_0:

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt > \frac{a_5}{2} e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp[U_0(x)] > 0. \tag{20.8}$$

При $|x| \leqslant X_0$ и достаточно малом $\nu_0 > 0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как доказывается в п. 2, а при $x < -X_0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как явствует из п. 3.

21. Перейдем к случаю, когда α иррационально. Здесь будем действовать во многом аналогично п. п. 9—15. Мы делаем конструкцию сегмента $\tau(S_0)$ как и ранее; из предыдущего видно, что если S_0 достаточно велико (сравнительно с уже выбранным h_0, и $\frac{1}{\gamma}$), а $\alpha = \frac{p}{q}$ рационально, то $g_{1\nu_0}(x) > 0$. Выберем такое S_0, что если бы соответствующее α было рациональным, то получилось бы $g_{1\nu_0}(x) > 0$, и зафиксируем его. Остается предположить, что избираемое нами соответственно п. 16 число α является иррациональным. Разложим его в непрерывную дробь, составим

ряд подходящих дробей $\frac{P_n}{Q_n}$ и числа η_n', как в п. 9; число η_0 будет избираться одним из них. Рассуждения п. 17 и п. 18, разумеется, не меняются. Соотношения (18.3) и (18.4) используются, как в п. 10. Вводится большое число $\tau > 1$. Если Q_n — наибольшее из чисел (9.5), не превосходящее τ, и если $U(t)$ подчинено (18.1), то будет иметь место соотношение, аналогичное (10.8). Вводим числа (10.9) и определяем τ с помощью (10.10). Тогда имеем (10.11). Считаем σ_0 большим; σ_0 будем разделять, как и в п. 10 на такие же классы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Начнем со случая $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$. Выбираем η_0 в классе чисел η_n' столь малым, что удовлетворяется (10.12); полагаем $\nu_0 \in (0, 1)$.

Далее, считая $|t| \leqslant \sqrt{q}$, повторяем рассуждение п. 11 и находим, что имеет место либо (11.5), либо (11.6), причем, разумеется, в (11.6), $U(t)$ отвечает так же обозначенной функции в (17.8). При t, удовлетворяющих (11.5), имеем из (17.8):

$$U(t) = t^2 \Big\{ \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \Big(\frac{1+v}{2}\Big)^2 (1 + Bt)\, d\Lambda(v) +$$

$$+ \exp(\alpha - 1)\,\sigma_0 \int_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \Big(\frac{\alpha+v}{2}\Big)^2 \cdot (1 + Bt)\, d\Lambda_1(v) -$$

$$- \nu_0 \exp(\eta_0 - 1)\,\sigma_0 \frac{\eta_0}{4} (1 + Bt) \Big\}.$$

Таким образом, считая, как обычно, σ_0 достаточно большим, и учитывая, что $h(\sigma_0) > \frac{a_0}{\sigma_0}$ (см. (11.12)), находим:

$$U(t) \geqslant \frac{t^2}{8} \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v) = \frac{t^2}{8} h(\sigma_0). \tag{21.1}$$

Мы видим отсюда, что $U(t) \geqslant 0$ при $|t| \leqslant \sqrt{q}$. Далее, при

$$|t| \geqslant \exp \frac{\sigma_0}{2} (\zeta_1 - 1) = \xi_0 \tag{21.2}$$

имеем

$$U(t) \geqslant \frac{1}{8} \exp[\sigma_0 (\zeta_1 - 1)]\, h(\sigma_0) > \exp \sigma_0 (\zeta_2 - 1) \tag{21.3}$$

при $\zeta_2 = \frac{1}{2}\zeta_1$.

Далее, как и в (20.6), находим, что при $|t| \leqslant \xi_0$, $V(t) = B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right)$. При $|t| \leqslant \xi_0$, легко находим из (17.8)

$$U(t) < 16\, t^2 h(\sigma_0). \tag{21.4}$$

Теперь обращаемся к интегралу

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z)\, e^{-izx}\, dt. \tag{21.5}$$

Как и в п. 11, вводим области изменения $t: D_q, T_{1q}, T_{2q}, T_{0q}$ и интегралы $J(D_q), J(T_{1q}), J(T_{2q}), J(T_{0q})$. Имеем (11.13), где $\psi(z)$ нужно

заменить на $\psi_0(z)$, и оценку (11.15) для $J(D_q)$. Как в п. 12, имеем оценку (12.2) для $J(T_{1q})$ и (12.3) для $J(T_{2q})$. Переходим к оценке $J(T_{2q})$ снизу. Имеем:

$$J(T_{0q}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \xi_0} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt. \tag{21.6}$$

В силу (21.4) и (17.7), находим:

$$J(T_{0q}) > \frac{1}{4\pi} \exp[U_0(x)] \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-32\, e^{\sigma_0} h(\sigma_0)\, t^2]\, dt >$$

$$> a_5 \exp[U_0(x)]\; e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}. \tag{21.7}$$

Сравнивая (21.7), (12.2), (12.3) и (11.15), приходим к выводу: $g_{1\nu_0}(x) > \frac{a_5}{e} \exp(U_0(x))\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} > 0$ при достаточно большом $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$.

22. Теперь рассмотрим случай $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_1$, следуя пп. 13 и 15. Как и в п. 13, вводим области D_τ и T_τ. Интеграл $J(D_\tau)$ оценивается (13.4). При $U(t)$, подчиненном (18.1), будем иметь соотношение (10.11), из которого следует (13.5) или (13.6). Далее, имеем (13.7) — (13.9). Из (13.8) следует (13.12), после чего (17.8) дает:

$$U(t) > \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, dv + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\tau}{200}\right). \tag{22.1}$$

Положим сперва $k \neq 0$,

$$t = 2\pi k q + w;\ |w| \leqslant c_4 \tau^{-0{,}01} = \xi_0 \tag{22.2}$$

Далее рассуждаем, как в п. 19 (см. (19.12) и (19.13)). Имеем (19.13), считая q достаточно большим. Затем получаем (19.14) и (19.15), где вместо ξ_4 нужно брать ξ_0. Далее, с помощью (19.16) — (19.20) находим для интеграла

$$\int\limits_{|t-2\pi k q| \leqslant \xi_0} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt$$

оценку:

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\gamma \pi^2 k^2 q^2). \tag{22.3}$$

Суммируя по $k \neq 1$, получаем оценку

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \pi^2 q^2\right). \tag{22.4}$$

Для значений $U(t)$, не подчиняющихся (18.1), т. е. подчиненных (20.2), получаем, как и в п. 20, оценку интеграла вида (20.3):

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp(-K_1 \sigma_0). \tag{22.5}$$

Наконец, при $k=0$, имеем из (17.8):

$$U(t)<2\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t(1+v)}{2}\,dv+B\exp\left(-\sigma_0-\frac{\tau}{200}\right)<$$
$$<4t^2h(\sigma_0)+B\exp\left(-\sigma_0-\frac{\tau}{200}\right). \qquad (22.6)$$

Отсюда:

$$U(t)>\exp\sigma_0(\zeta_1-1)\ \text{при}\ |t|\leqslant\exp\frac{\sigma_0}{2}(2\zeta_1-1)$$

($\zeta_1>0$ константа). Это позволяет написать:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\xi_0}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\xi_1}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt+B\exp\left(-\exp\frac{\zeta_1}{2}\,\sigma_0\right), \qquad (22.7)$$

где $\xi_1=\exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(2\zeta_1-1)\right]$. После этого, $V(t)$ при $|t|\leqslant\xi_1$ оценивается, как в (20.6), и мы получаем, как в (20.7)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\xi_1}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt>a_5e^{-\frac{\sigma_0}{2}}(h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}\exp[U_0(x)]. \qquad (22.8)$$

Сопоставляя (22.8), (22.7), (22.5); (22.4) и (13.4), находим, при $x\geqslant X_0$ и $\sigma_0\in\mathfrak{A}_1$:

$$g_{1\nu_0}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt>\frac{a_5}{2}e^{-\frac{\sigma_0}{2}}(h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}\exp[U_0(x)]>0. \qquad (22.9)$$

При достаточно малом $\nu_0>0$, имеем $g_{1\nu_0}(x)>0$ при $|x|\leqslant X_0$ и $g_{1\nu_0}(x)>0$ при $x\leqslant -X_0$. Таким образом, при достаточно малом $\nu_0>0$, функция (17.3) будет х. ф. случайной величины Y_0.

23. Обращаясь к (17.7), замечаем, что:

$$\psi(z)=\exp\left[\gamma z^2+\int\limits_{I}(e^{z\frac{u}{u_0}}-1)\,dG(u)+\int\limits_{I_2^{(S_0)}\cdot u_0}(e^{z\frac{u}{u_0}}-1)\,dG(u)-\nu_0(e^{\eta_0 z}-1)\right],$$

где $I_2^{(S_0)}\cdot u_0$ — сегмент $I_2^{(S_0)}$, растянутый в u_0 раз.

Если заменим $\gamma>0$ числом $\frac{\gamma}{u_0^2}>0$, то, очевидно, проходят такие же рассуждения, только число ν_0 быть может, придется еще уменьшить. Таким образом функция

$$\psi_1(z)=\exp\left[\frac{\gamma}{u_0^2}z^2+\int\limits_{I_1}(e^{\frac{z}{u_0}u}-1)\,dG(u)+\int\limits_{I_2^{(S_0)}\cdot u_0}(e^{\frac{z}{u_0}u}-1)\,dG(u)-\right.$$
$$\left.-\nu(e^{\eta_0u_0\frac{z}{u_0}}-1)\right] \qquad (23.1)$$

будет х. ф. случайной величины Y_1 при $\nu > 0$, $\nu \leqslant \nu_0$. Но тогда и

$$\psi_2(z) = \psi_1(zu_0) = \exp\left[\gamma z^2 + \int_{I_1} (e^{zu} - 1)\, dG(u) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{I_2^{(S_0)} \cdot u_0} (e^{zu} - 1)\, dG(u) - \nu\,(e^{\eta_0 u_0 z} - 1)\right] \qquad (23.2)$$

будет х. ф. случайной величины Y_2.

Обращаясь к (2.6), обозначим множество $[\beta, 1] - I_1 - I_2^{(S_0)} \cdot u_0$, где первый член содержит сумму второго и третьего, через $\mathfrak{A}$. Очевидно, функция

$$\psi_3(z) = \exp\left[\int_{\mathfrak{A}} (e^{zu} - 1)\, dG(u)\right] \qquad (23.3)$$

будет х. ф. случайной величины Y_3, притом безгранично делимой.

Считая Y_3 независимым от Y_2, получаем, что $\psi_2(z)\psi_3(z) = \mathbf{E}\exp z \times (Y_2 + Y_3)$ есть х. ф. случайной величины $Y_2 + Y_3$. Но $\psi_2(z)\psi_3(z) = \psi(z)$, как видно из (2.7), и лемма III доказана.

24. Если в (2.2) — (2.7) переменить знак у переменной z, то, очевидно, леммы I, II, III останутся в силе. Кроме того, если в (2.6) берется интеграл не от β до 1, а от β_1 до β_2, $\beta_2 > \beta_1 > 0$, то, очевидно, лемма III остается в силе; достаточно произвести соответствующие замены переменных u и z, состоящие в умножении этих переменных на положительные числа.

Теперь мы можем доказывать необходимость условия (1.1) и (1.2) теоремы 1. Сперва покажем, что если имеющий гауссову компоненту закон $F \in L$ имеет только б. д. компоненты, то его пуассонов спектр в формуле (0.1) не может иметь непрерывных компонент. Пусть это не так. Пусть X — соответствующая случайная величина; и пусть, например, непрерывная компонента имеется в функции $G(u)$. Тогда X разлагается на сумму двух независимых случайных величин: $X = X_1 + X_2$, причем X_1 имеет х. ф. $\varphi_1(t)$ вида:

$$\varphi_1(t) = \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t^2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} (e^{itu} - 1)\, dG(u)\right] \qquad (24.1)$$

где $G(u)$ непрерывная функция. Согласно лемме III, при достаточном малом $\gamma > 0$ функция вида

$$\varphi_3(t) = \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t^2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} (e^{itu} - 1)\, dG(u) - \nu\,(e^{i\eta_0 t} - 1)\right] \qquad (24.2)$$

будет х. ф. случайной величины X_3. Очевидно, функция $\varphi_4(t) = \exp[\nu(e^{i\eta_0 t} - 1)]$ будет х. ф. пуассоновой случайной величины X_4, и $X_1 = X_3 + X_4$; X_3, X_4 независимы и не зависят от X_2. Тогда: $X = X_3 + (X_2 + X_4)$, где все компоненты независимы, и X_3 не является безгранично делимым, как следует из (24.2). Аналогично действуем, если отрицательная часть пуассонова спектра содержит непрерывную компо-

ненту. Итак, закон $F \in I_0$, имеющий гауссову компоненту, может иметь лишь счетный или конечный пуассонов спектр. Имеет место соотношение (0.8). Пусть $\mu = \mu_{m_1}$ и $\mu' = \mu_{m_2}$ две любые частоты положительной части пуассонова спектра в (0,8) и $\mu < \mu'$. Докажем, что $\frac{\mu'}{\mu} = n$ целое число. В самом деле, рассмотрим

$$\varphi_1(t) = \exp[-\gamma t^2 + \lambda_{m_1}(e^{it\mu} - 1) + \lambda_{m_2}(e^{it\mu'} - 1)].$$

Если $\frac{\mu}{\mu'} = \alpha$ иррационально, то, согласно лемме II, действуя как было сказано выше, найдем разложение $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)\varphi_3(t)$, где $\varphi_2(t)$ будет отвечать не б. д. закону; значит, исходный закон F будет иметь не б. д. компоненту. Итак, $\alpha = \frac{p}{q}$ рационально. Тогда по таким же соображениям из леммы I вытекает, что $p = 1$ (считаем $(p, q) = 1$), иначе исходный закон F имел бы не б. д. компоненту. Итак, если $\mu_{m_2} > \mu_{m_1}$, то $\frac{\mu_{m_2}}{\mu_{m_1}}$ целое число. Совершенно то же касается частот в отрицательной части пуассонова спектра: если $\nu_{m_2} > \nu_{m_1}$, то $\frac{\nu_{m_2}}{\nu_{m_1}}$ — целое число. Отсюда следует, что числа μ_m могут иметь только две предельных точки: 0 или $+\infty$. В самом деле, если бы у них существовала предельная точка $\mu \neq 0, \infty$, то в сегменте $\left[\frac{3}{4}\mu, \frac{5}{4}\mu\right]$ существовали бы две частоты μ и $\mu' > \mu$, причем, очевидно, $\frac{\mu'}{\mu} \leqslant \frac{5}{3}$ не могло бы быть целым числом. Совершенно аналогично, числа ν_m могут иметь лишь две предельные точки 0 или ∞.

Пусть $\mu > 0$ — одно из чисел μ_m (если их множество не пусто). Все числа $\mu_m > \mu$, в силу сказанного выше, можно упорядочить по возрастанию, и отношение каждого из них к предыдущему будет целым числом, а числа левее μ можно упорядочить по убыванию, и каждое из них будет также делить предыдущее. То же касается и чисел ν_m. Таким образом, необходимость условий теоремы 1 доказана.

Поступила в редакцию
5.9.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramer, Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, Math. Zeitschr., **41** (1936), 405—414.
[2] P. Lévy, Sur les exponentielles de polynomes..., Ann. Ec. Norm. Sup., **54** (1937), 231—292.
[3] P. Lévy, L'arithmétique des lois de probabilités, J. Math. Pures. Appl., **15** (1936), 11—24.
[4] А. Я. Хинчин, К арифметике законов распределения, Бюлл. Матем. ин-та МГУ, **1** (1937), 6—17.
[5] Д. А. Райков, О разложении законов Пуассона, ДАН СССР, **14** (1937), 9—12.
[6] Д. А. Райков, О разложении законов Гаусса и Пуассона, Изв. АН СССР, сер. матем. **1** (1938), 90—124.

[7] R. A. Fisher et D. Dugué, Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilités, C. R. Acad. Sci. Paris, **227** (1948), 1205—1207.
[8] H. Cramér, Problems in probability theory, Annals of Math. Stat., **18**, № 2 (1947), 165—193.
[9] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.
[10] А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых величин, ОНТИ, 1938.
[11] Ю. В. Линник, О композиции вероятностных законов Гаусса и Пуассона, ДАН СССР, **114** (1957), 21—24.
[12] Ю. В. Линник, О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона, Теория вероятн. и ее применения, **II**, вып. 1 (1957), 34—59.
[13] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, ГТТИ, 1933.
[14] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, ГТТИ, 1948.
[15] Ш. Ж. Де ла Валле—Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. 1, ГТТИ, 1933.

GENERAL THEOREMS ON THE FACTORIZATION OF INFINITELY DIVISIBLE LAWS

Yu. V. LINNIK (*LENINGRAD*)

(Summary)

Let an infinitely divisible law for a one-dimensional random variable be given by the logarithm of its characteristic function (c. f), $\varphi(t)$:

$$\log \varphi(t) = i\beta t - \gamma t^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG_-(u) + \int_{0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG_+(u),$$

where β and $\gamma \geqslant 0$ are real constants; $G_-(u)$ and $G_+(u)$ are non-decreasing functions such that

$$G_-(-\infty) = G_+(\infty) = 0; \quad \int_{-a}^{0} u^2 d\,G_-(u) + \int_{0}^{a} u^2 dG_+(u) < \infty$$

for any finite $a > 0$, and $\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dG_- + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dG_+ \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. We call $G_-(u)$ and $G_+(u)$ the negative and positive part of the Poissonian spectrum of the corresponding law and $\gamma \geqslant 0$ its Gaussian component.

We introduce also the well understandable concepts of the bounded Poissonian spectrum, continuous Poissonian spectrum, countable or finite Poissonian spectrum. In particular, in case of the countable or finite Poissonian spectrum, we may write:

$$\log \varphi(t) = i\beta t - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(e^{it\mu_m} - 1 - \frac{it\mu_m}{1+\mu_m^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(e^{-it\nu_n} - 1 + \frac{it\nu_n}{1+\nu_n^2} \right),$$

where μ_m, ν_n are termed to be Poissonian frequences; $\lambda_m \geqslant 0$, $\lambda_n \geqslant 0$ — energy parameters.

Theorem 1. *For an infinitely divisible law with a Gaussian component $\gamma > 0$ to decompose only into infinitely divisible components it is necessary that its Poissonian spectrum be finite or countable. Moreover, the corresponding Poissonian frequences μ_m and ν_n must coincide with the following series of numbers:*

For μ_m,

$$\dots k_{-1}k_{-2}\mu,\ k_{-1}\mu,\ \mu,\ \frac{\mu}{k_1},\ \frac{\mu}{k_1k_2},\ \dots,\ \frac{\mu}{k_1k_2\dots k_s},\ \dots.$$

For ν_n,

$$\dots l_{-1}l_{-2}\nu,\ l_{-1}\nu,\ \nu,\ \frac{\nu}{l_1},\ \frac{\nu}{l_1l_2},\ \dots,\ \frac{\nu}{l_1l_2\dots l_s},\ \dots$$

where $\dots k_{-2}, k_{-1}, k_1, k_2, \dots$ *and* $\dots l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, \dots$ *are arbitrary sets of natural numbers* >1 *(repetitions being permitted). If the Poissonian spectrum is bounded, this necessary condition is also sufficient.*

The presence of the Gaussian component is essential. If the Poissonian spectrum is not bounded, it is not known whether the necessary condition is also sufficient. It is proved only that it is sufficient if the high frequency energy is sufficiently small (Theorem 4), it is sufficient if

$$\log\log\frac{1}{\lambda_m} > c\mu_m^{1+\alpha};\ \log\log\frac{1}{\lambda_{-n}} > c\nu_n^{1+\alpha}$$

for some $c>0$, $\alpha>0$ and sufficiently large μ_m and ν_n.

Theorem 2. *If the Poissonian spectrum of the law is bounded so that* $dG_-(u)=0$ $(u<-b)$; $dG_+(u)=0$ $(u>a)$, *then all its components have c. f. of the form:*

$$\varphi_j(t)=\exp\left\{P_{3j}(it)+t^4\int_{-b}^{a}e^{itu}\Phi_j(u)\,du\right\},$$

where $P_{3j}(it)$ *is a polinomial of degree* $\leqslant 3$ *and* $\Phi_j(u)\in L^2(-b, a)$*—Lebesgue summable with its square function.*

Theorem 3. *Let F be an infinitely divisible law with a bounded Poissonian spectrum which is rational to the right of the point* $\alpha\geqslant 0$. *Then all its possible components have c. f. of the form:*

$$\log\varphi(t)=P_3(it)+t^4\int_{-b}^{\alpha}e^{itu}\Phi(u)\,du+\sum_{n=1}^{q}(\alpha_n+\beta_n it)\left(\exp\left(it\frac{n}{q}\mu\right)-1\right),$$

where α_n, β_n *are real numbers (not necessarily positive),* $\Phi(u)\in L^2(-b, a)$; $P_3(it)$ *a polinomial of degree* $\leqslant 3$.

A "stability theorem" (theorem 5) is also proved: Let I_1 be the set of all infinitely divisible laws with bounded Poissonian spectra satisfying the necessary condition of the theorem 1 (the Gaussian component may be absent). Let $F\in I_1$ and K_F be the set of all infinitely divisible laws with the Poissonian spectra contained in the spectrum of F. Let $\{F_j\}$ be the sequence of laws such that:

$$\sup_x|F_j(x)-F(x)|=\varepsilon_j\to 0,\ \text{as}\ j\to\infty$$

and $F_j=F_{1j}*F_{2j}$ (composition).

Then

$$\inf_{F^{(1)}\in K_F}\sup_x|F_{1j}(x)-F^{(1)}(x)|=\delta_j\to 0.$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1958

СКАЧКООБРАЗНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Е. Б. ДЫНКИН

Введение

1. Цель настоящей работы — вычислить инфинитезимальные операторы скачкообразных марковских процессов.

Однородный марковский процесс * определяется заданием следующих элементов: фазового пространства $(\mathcal{E}, \mathfrak{B})$, пространства Ω элементарных событий, функции $x(t, \omega)$ $(t \geqslant 0, \omega \in \Omega)$ со значениями из $\mathcal{E}$, системы вероятностных мер $P_x(x \in \mathcal{E})$ в пространстве Ω. При этом фазовое пространство есть произвольное измеримое пространство, т. е. пара, состоящая из абстрактного множества $\mathcal{E}$ и σ-алгебры его подмножеств $\mathfrak{B}$ (предполагается, что $\mathfrak{B}$ содержит все одноточечные подмножества); пространство элементарных событий есть произвольное множество; вероятностные меры P_x определены на σ-алгебре, порожденной множествами $\{\omega : x(t, \omega) \in \Gamma\}$ $(t \geqslant 0, \Gamma \in \mathfrak{B})$, и удовлетворяют условию согласованности (или условию марковости), которое сформулировано ниже. Вместо $x(t, \omega)$ сокращенно пишут $x(t)$ или x_t. Интеграл $\int_\Omega \xi(\omega) P_x(d\omega)$ обозначают $M_x\xi$.

Обозначим $\mathfrak{M}_\tau$ σ-алгебру, порожденную множествами $\{\omega : x_t \in \Gamma\}$ $(t \leqslant \tau, \Gamma \in \mathfrak{B})$. Условные вероятности относительно этой σ-алгебры будем обозначать символом $P_x(\ldots \mid x_t, t \leqslant \tau)$. Условие марковости требует, чтобы для любой положительной постоянной τ и для любых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ с вероятностью 1 имело место соотношение

$$P_x(x_{\tau+t_1} \in \Gamma_1, \ldots, x_{\tau+t_n} \in \Gamma_n \mid x_t, t \leqslant \tau) = P_{x_\tau}(x_{t_1} \in \Gamma_1, \ldots, x_{t_n} \in \Gamma_n). \quad (0.1)$$

Однородный марковский процесс мы будем называть скачкообразным, если для всякого $\omega \in \Omega$ и всякого $t \geqslant 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $x(t, \omega) = x(t + h, \omega)$ для всех $0 \leqslant h < \varepsilon$ **.

Различные специальные классы скачкообразных процессов изучались В. Феллером [13], [14], В. Деблином [10], В. М. Дубровским [5], [6], Дж. Л. Дубом [11] и др. Близким вопросам посвящены недавние работы

---

* Определения однородного марковского и строго марковского процесса, которые даны ниже, совпадают с определениями, приведенными в [3] и [7]. Единственное отличие состоит в том, что мы не предполагаем теперь, что множество $\mathcal{E}$ снабжено топологией и что $\mathfrak{B}$ порождено открытыми множествами. (Определение класса неоднородных строго марковских процессов см. в [4].)

** Скачкообразные процессы можно также описать как процессы, непрерывные справа в дискретной топологии пространства $\mathcal{E}$.

В. Феллера [15] и Р. Л. Добрушина [1], в которых описан класс процессов со счетным множеством состояний, не включающий всех скачкообразных процессов, но зато содержащий некоторые процессы более сложного типа.

2. Всякий скачкообразный марковский процесс является строго марковским (см. [8]), т. е. он удовлетворяет условию (0.1) не только для любой постоянной, но и для любой случайной величины $\tau = \tau(\omega)$, не зависящей от будущего. Последнее означает, что $\tau \geqslant 0$ и $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$ при любом $t \geqslant 0$. Символ $P_x(\ldots | x_t,\ t \leqslant \tau)$ в формуле (0.1) обозначает условную вероятность относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}_\tau$, которая определяется условием: $A \in \mathfrak{M}_\tau$, если $A \cap \{\omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$ при любом постоянном $t \geqslant 0$ *.

3. Не ограничивая существенно общности, можно считать, что пространство элементарных событий Ω удовлетворяет условию: для любых $\omega \in \Omega$, $h \geqslant 0$ найдется такое $\omega' \in \Omega$, что $x(t+h, \omega) = x(t, \omega')$ для всех $t \geqslant 0$. Элемент ω' определяется по ω, вообще говоря, неоднозначно. Однако если $\xi(\omega)$ есть $\mathfrak{M}$-измеримая функция, то, как нетрудно показать, $\xi(\omega')$ есть однозначная функция от ω. Мы будем обозначать эту функцию $\theta_h(\xi)$. Если $\tau = \tau(\omega)$ произвольная неотрицательная случайная величина, то мы определим функцию $\eta = \theta_\tau \xi$ равенством $\eta(\omega) = \theta_h \xi(\omega)$ на множестве тех ω, для которых $\tau = h$.

Доказывается, что если x_t есть строго марковский процесс, то для любой случайной величины τ, не зависящей от будущего, и любой $\mathfrak{M}$-измеримой функции ξ имеем

$$M_x(\theta_\tau \xi \mid x_t,\ t \leqslant \tau) = M_{x_\tau} \xi \qquad (0.2)$$

для почти всех ω **.

Условимся писать $B = \theta_\tau A$, если $\chi_B = \theta_\tau \chi_A$ (χ_A означает индикатор множества A, т. е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A). Из (0.2) вытекает, что если процесс является строго марковским, то для любой случайной величины τ, не зависящей от будущего, и любого множества A

$$P_x(\theta_\tau A \mid x_t,\ t \leqslant \tau) = P_{x_\tau}(A) \qquad (0.3)$$

для почти всех ω.

Отметим, что операторы θ_τ перестановочны с операцией сложения и пересечения любого числа множеств, а также с операцией взятия дополнения. Заметим еще, что

$$\theta_\tau A = \bigcup_t \{\tau = t\} \cap \theta_t A. \qquad (0.4)$$

4. Мы рассматриваем пространство B всех ограниченных $\mathfrak{B}$-измеримых функций в пространстве $\mathcal{E}$ и полагаем

$$T_t f(x) = M_x f(x_t), \qquad (f \in B). \qquad (0.5)$$

---

* Частным случаем величин, не зависящих от будущего, являются постоянные. Для них σ-алгебра $\mathfrak{M}_\tau$ определена нами дважды. Легко видеть, что оба определения не противоречат друг другу.

** Если τ кроме конечных значений принимает значение $+\infty$, то соотношение (2) выполняется для почти всех ω, удовлетворяющих условию $\tau(\omega) < +\infty$.

Слабым инфинитезимальным оператором процесса x_t называется оператор $\widetilde{A}$, определенный формулой

$$\widetilde{A}f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}, \tag{0.6}$$

на всех функциях из B, для которых отношение, стоящее в правой части, равномерно ограничено при всех $t > 0$, $x \in \mathcal{E}$ и предел существует при любом $x \in \mathcal{E}$.

При широких предположениях оператор $\widetilde{A}$ однозначно определяет переходные вероятности $P(t, x, \Gamma) = P_x(x_t \in \Gamma)$ марковского процесса x_t (см. [2]). При вычислении $\widetilde{A}$ мы будем опираться на следующие результаты, полученные в [2] — [3].

Теорема 0.1. *Пусть x_t — произвольный однородный марковский процесс. Тогда при любом $\lambda > 0$ оператор $\lambda E - \widetilde{A}$ отображает взаимно однозначно область определения $D_{\widetilde{A}}$ оператора $\widetilde{A}$ на множество $\widetilde{B}_0$ всех функций $f \in B$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t f(x) = f(x)$ при любом $x \in \mathcal{E}$. Обратный оператор $R_\lambda = (\lambda E - \widetilde{A})^{-1}$ дается формулой*

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x)\, dt = M_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t)\, dt. \tag{0.7}$$

Теорема 0.2. *Пусть x_t — произвольный однородный строго марковский процесс и τ случайная величина, не зависящая от будущего. Если $f \in D_{\widetilde{A}}$ и $h = \lambda f - \widetilde{A}f$, то*

$$M_x[e^{-\lambda\tau} f(x_\tau)] - f(x) = -M_x \int_0^\tau e^{-\lambda t} h(x_t)\, dt. \tag{0.8}$$

Если $M_x\tau < \infty$, то

$$M_x f(x_\tau) - f(x) = M_x \int_0^\tau g(x_t)\, dt, \tag{0.9}$$

где $g = \widetilde{A}f$.

§ 1. Случайные величины τ_α и x_α

5. Число $t > 0$ называется моментом скачка траектории $x(t, \omega)$, если найдется последовательность $t_n \uparrow t$ такая, что $x(t_n, \omega) \neq x(t, \omega)$. Моменты скачков образуют на полупрямой $[0, +\infty)$ не более, чем счетное, вполне упорядоченное множество $\Xi(\omega)$. Обозначим $\nu_{s,t}$ порядковый тип пересечения $\Xi(\omega)$ с интервалом $(s, t]$ *.

Условимся обозначать через N совокупность всех трансфинитных чисел, соответствующих вполне упорядоченным множествам не более, чем счетной мощности. Предположим, что некоторое подмножество N' множества N удовлетворяет условиям: а) $0 \in N'$; б) если $\alpha \in N'$, то $\alpha + 1 \in N'$;

* Необходимые сведения о вполне упорядоченных множествах и их порядковых типах (трансфинитных числах) можно найти, например, в книге Хаусдорфа «Теория множеств», М.—Л., 1937 (глава 4).

в) если $\alpha_n \uparrow \alpha^*$ и $\alpha_n \in N'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\alpha \in N'$. Тогда $N' = N$ (принцип трансфинитной индукции).

Лемма 1.1. *Для любых* $\alpha \in N$, $0 \leqslant s < t$ *множество* $\{\omega : \nu_{s,t} \geqslant \alpha\}$ *принадлежит* σ*-алгебре* $\mathfrak{N}_{s,t}$, *порожденной множествами* $\{\omega : x_u \in \Gamma\}$ $(s \leqslant u \leqslant t$, $\Gamma \in \mathfrak{B})$.

Доказательство. Обозначим N' совокупность всех $\alpha \in N$, для которых выполнено утверждение леммы. Очевидно, $0 \in N'$. Далее, если $\alpha_n \uparrow \alpha$, то

$$\bigcap_n \{\nu_{s,t} \geqslant \alpha_n\} = \{\nu_{s,t} \geqslant \alpha\}.$$

Поэтому если $\alpha_n \in N'$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $\alpha \in N'$. Наконец,

$$\{\nu_{s,t} \geqslant \alpha + 1\} = \bigcup_r \{\nu_{s,r} = \alpha,\ \nu_{r,t} \geqslant 1\},$$

где r пробегает все рациональные числа интервала (s, t). Поэтому из $\alpha \in N'$ следует, что $\alpha + 1 \in N'$. Стало быть $N' = N$.

Отметим важные для дальнейшего очевидные соотношения

$$\nu_{s,t} + \nu_{t,u} = \nu_{s,u}, \qquad (0 \leqslant s < t < u) \tag{1.1}$$

$$\theta_h \{\nu_{s,t} = \alpha\} = \{\nu_{s+h,\,t+h} = \alpha\}, \qquad (0 \leqslant s < t,\ h \geqslant 0,\ \alpha \in N) \tag{1.2}$$

$$\{\nu_{0,s} = \alpha,\ \nu_{s,s+t} < \beta\} = \{\nu_{0,s} = \alpha,\ \nu_{0,s+t} < \alpha + \beta\}. \tag{1.3}$$

6. Положим

$$\tau_0(\omega) = 0,\ \tau_\alpha(\omega) = \sup\{t:\ \nu_{0,t} < \alpha\}\ (\alpha \in N,\ \alpha > 0),\ x_\alpha(\omega) = x[\tau_\alpha(\omega), \omega]\ (\alpha \in N).$$

Функции $\tau_\alpha(\omega)$ принимают неотрицательные значения, включая значение $+\infty$. Функция $x_\alpha(\omega)$ определена лишь на множестве $\Omega_\alpha = \{\omega : \tau_\alpha(\omega) < +\infty\}$.

Совокупность конечных значений $\tau_\alpha(\omega)$ $(\alpha \in N,\ \alpha > 0)$ совпадает с множеством $\Xi(\omega)$. Поэтому естественно назвать τ_α α-ым моментом скачка траектории $x(t, \omega)$.

Заметим, что

$$\{\tau_\alpha \leqslant t\} = \{\nu_{0,t} \geqslant \alpha\}. \tag{1.4}$$

Из (1.4) и леммы 1.1 вытекает, что τ_α суть случайные величины, не зависящие от будущего. Далее, очевидно, что если $\alpha < \beta$ и $\tau_\alpha < +\infty$, то $\tau_\alpha < \tau_\beta$ и если $\alpha_n \uparrow \alpha$, то $\tau_{\alpha_n} \uparrow \tau_\alpha$.

Покажем, что для каждого $x \in \mathscr{E}$ найдется такое $\alpha \in N$, что $P_x\{\tau_\alpha = +\infty\} = 1$. Положим $u_\alpha = M_x e^{-\tau_\alpha}$. Если $P_x\{\tau_\alpha = +\infty\} < 1$ для всех $\alpha \in N$, то все числа u_α $(\alpha \in N)$ были бы отличны от нуля, и для любых $\alpha < \beta$ выполнялось бы неравенство $u_\alpha > u_\beta$. Мы получили бы на прямой несчетное множество попарно непересекающихся интервалов $(u_{\alpha+1}, u_\alpha)$ $(\alpha \in N)$, что, очевидно, невозможно.

---

* Запись $\alpha_n \uparrow \alpha$ означает, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$ и α есть наименьшее трансфинитное число, большее всех чисел α_n.

Лемма 1.2. *Для любых* α, $\beta \in N$

$$\theta_{\tau_\alpha} \tau_\beta = \tau_{\alpha+\beta} - \tau_\alpha, \tag{1.5}$$

$$\theta_{\tau_\alpha} x_\beta = x_{\alpha+\beta}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Из (1.3) и включения $\{\tau_\alpha = s\} \subseteq \{\nu_{0,\,s} = \alpha\}$ имеем

$$\{\tau_\alpha = s, \quad \nu_{s,\,s+t} < \beta\} = \{\tau_\alpha = s, \quad \nu_{0,\,s+t} < \alpha + \beta\}$$

и, в силу (1.4) и (1.2)

$$\{\tau_\alpha = s\}\, \theta_s \{\tau_\beta > t\} = \{\tau_\alpha = s, \quad \tau_{\alpha+\beta} > s + t\}.$$

Заметим теперь, что согласно (0.4)

$$\theta_{\tau_\alpha} \{\tau_\beta > t\} = \bigcup_{s \geqslant 0} \{\tau_\alpha = s\}\, \theta_s \{\tau_\beta > t\} = \bigcup_{s \geqslant 0} \{\tau_\alpha = s,\ \tau_{\alpha+\beta} > s + t\} =$$
$$= \bigcup_{s \geqslant 0} \{\tau_\alpha = s,\ \tau_{\alpha+\beta} - \tau_\alpha > t\} = \{\tau_{\alpha+\beta} - \tau_\alpha > t\}.$$

Следовательно, выполняется (1.5).

Далее,

$$\theta_{\tau_\alpha} \{x_\beta = x\} = \bigcup_{t \geqslant 0} \theta_{\tau_\alpha} \{\tau_\beta = t,\ x_t = x\} = \bigcup_{t \geqslant 0} \{\tau_{\alpha+\beta} - \tau_\alpha = t,\ x_{\tau_\alpha + t} = x\} =$$
$$= \bigcup_{t \geqslant 0} \{\tau_{\alpha+\beta} - \tau_\alpha = t,\ x_{\alpha+\beta} = x\} = \{x_{\alpha+\beta} = x\}.$$

Следовательно, $\theta_{\tau_\alpha} x_\beta = x_{\alpha+\beta}$.

7. Трансфинитное число γ называется неразложимым, если его нельзя представить в виде суммы двух меньших трансфинитных чисел. Нетрудно проверить, что если γ неразложимое трансфинитное число, то из $\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$ следует $\alpha + \beta < \gamma$ и $\alpha + \gamma = \gamma$. Поэтому для $\alpha < \gamma$ соотношения (1.5) — (1.6) могут быть переписаны в виде

$$\theta_{\tau_\alpha} \tau_\gamma = \tau_\gamma - \tau_\alpha, \tag{1.5'}$$

$$\theta_{\tau_\alpha} x_\gamma = x_\gamma. \tag{1.6'}$$

Отметим еще, что в силу (1.1) для неразложимого γ

$$\{\nu_{0,\,s} < \gamma, \quad \nu_{s,\,s+t} < \gamma\} = \{\nu_{0,\,s+t} < \gamma\}$$

и, принимая во внимание (1.2) и (1.4), имеем

$$\{\tau_\gamma > s\}\, \theta_s \{\tau_\gamma > t\} = \{\tau_\gamma > s + t\}, \quad (s \geqslant 0,\ t \geqslant 0). \tag{1.7}$$

8. Лемма 1.3. *Случайная величина* τ_1 *имеет показательное распределение*

$$P_x \{\tau_1 > t\} = e^{-at} \qquad (0 \leqslant a < +\infty) \tag{1.8}$$

Доказательство. Положим $A_t = \{\tau_1 > t\}$. Поскольку 1 неразложимое число, к нему применимо соотношение (1.7), и $A_s \theta_s A_t = A_{s+t}$. В силу (0.3) и определения условной вероятности, имеем

$$P_x(A_{s+t}) = P_x(A_s \theta_s A_t) = \int_{A_s} P_x(\theta_s A_t \mid x_u,\ u \leqslant s)\, P_x(d\omega) = \int_A P_{x_s}(A_t)\, P_x(d\omega).$$

Поскольку $x_s = x$ для $\omega \in A_s$, отсюда вытекает соотношение $P_x(A_{s+t}) = P_x(A_s) P_x(A_t)$. Таким образом, функция $f(t) = P_x(A_t)$ удовлетворяет уравнению

$$f(s+t) = f(s) f(t). \tag{1.9}$$

Эта функция, очевидно, неотрицательна, не превосходит 1 и не возрастает. Если бы $f(t) = 0$ для всех $t > 0$, то $P_x\{\tau_1 > 0\} = 0$, что противоречит определению скачкообразного процесса. Следовательно, найдется $h > 0$ такое, что $1 \geqslant f(h) > 0$ и, следовательно, $f(h) = e^{-ah}$, где $0 \leqslant a < +\infty$. В силу (1.9) при любом натуральном h имеем $f\left(\frac{h}{n}\right)^n = f(h) = e^{-ah}$ и, так как $f\left(\frac{h}{n}\right) \geqslant 0$, то $f\left(\frac{h}{n}\right) = e^{-h/n}$. Далее, для любого натурального m имеем $f\left(\frac{m}{n} h\right) = f\left(\frac{h}{n}\right)^m = e^{-a\frac{m}{n}h}$. В силу монотонности функции $f(t)$ отсюда следует, что $f(t) = e^{-at}$ для всех $t > 0$ и наша лемма доказана.

§ 2. Аналитический вид инфинитезимального оператора

9. Пусть $a = a(x)$ обозначает константу, входящую в формулу (1.8). Положим

$$\Pi(x, \Gamma) = P_x\{x_1 \in \Gamma\} \tag{2.1}$$

и рассмотрим оператор

$$\mathfrak{A}f(x) = a(x)[-f(x) + M_x f(x_1)] = -a(x) f(x) + a(x) \int_{\mathscr{E}} \Pi(x, dy) f(y). \tag{2.2}$$

Областью определения оператора $\mathfrak{A}$ будет считать совокупность всех функций $f \in B$ таких, что $\mathfrak{A}f \in B$.

Теорема 2.1. *Слабый инфинитезимальный оператор $\tilde{A}$ скачкообразного процесса x_t является сужением оператора $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $f \in D_{\tilde{A}}$. Если $a(x) = 0$ для некоторого $x \in \mathscr{E}$, то в силу (1.8) $P_x\{\tau_1 = +\infty\} = 1$; следовательно, $P_x\{x_t = x\} = 1$ для всех $t \geqslant 0$ и по формулам (0.5) — (0.6) имеем $T_t f(x) = f(x)$, $\tilde{A}f(x) = 0$. То же значение имеет и $\mathfrak{A}f(x)$. Если $a(x) > 0$, то $M_x\tau_1 = \frac{1}{a(x)} < \infty$. По теореме 0.2

$$M_x f(x_1) - f(x) = M_x \int_0^{\tau} g(x_t)\, dt, \tag{2.3}$$

где $g = \tilde{A}f$. Но $x_t = x$ для $t < \tau_1$, и поэтому правая часть (2.3) равна $g(x) M_x\tau_1 = g(x)/a(x)$. Подставляя это значение в (2.3), получаем

$$g(x) = a(x)[-f(x) + M_x f(x_1)] = \mathfrak{A}f(x),$$

и теорема доказана.

10. Стоящая перед нами задача свелась теперь к задаче описания области определения оператора $\tilde{A}$. Первый шаг в этом направлении делается в следующей лемме:

Лемма 2.1. *Если x_t — скачкообразный процесс, то для любого $f \in B$ и любого $x \in \mathcal{E}$ имеем $\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t f(x) = f(x)$ (т. е. множество $\widetilde{B}_0$, упомянутое в теореме* 0.1, *совпадает с B).*

Доказательство. В силу (1.8) $P_x(\tau_1 \leqslant t) = 1 - e^{-at}$ и*

$$|T_t f(x) - f(x)| = |M_x f(x_t) - f(x)| = \left| \int\limits_{\tau_1 \leqslant t} [f(x_t) - f(x)] P_x(d\omega) \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \|f\| P_x(\tau_1 \leqslant t) = 2 \|f\| [1 - e^{-at}].$$

Мы дадим два различных способа описания области $D_{\widetilde{A}}$. Первый из них приводит к более простым формулировкам. Второй значительно глубже вскрывает строение произвольного скачкообразного процесса.

§ 3. Операторы Π_λ^α

11. Положим

$$\left.\begin{aligned} \Pi_\lambda^\alpha f(x) &= M_x [e^{-\lambda\tau_\alpha} f(x_\alpha)] \quad (\lambda \geqslant 0, \quad \alpha \in N, \quad f \in B) \\ \Pi^\alpha f(x) &= \Pi_0^\alpha f(x) = M_x f(x_\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Для любых $\lambda \geqslant 0$; α, $\beta \in N$*

$$\Pi_\lambda^{\alpha+\beta} = \Pi_\lambda^\alpha \Pi_\lambda^\beta. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из леммы 1.2 вытекает, что

$$e^{-\lambda\tau_\alpha} \theta_{\tau_\alpha} [e^{-\lambda\tau_\beta} f(x_\beta)] = e^{-\lambda\tau_{\alpha+\beta}} f(x_{\alpha+\beta}).$$

Поскольку τ_α не зависит от будущего и функция $e^{-\lambda\tau_\alpha}$ является $\mathfrak{M}_{\tau_\alpha}$-измеримой, имеем из (0.2)

$$M_x e^{-\lambda\tau_{\alpha+\beta}} f(x_{\alpha+\beta}) = M_x \{e^{-\lambda\tau_\alpha} \theta_{\tau_\alpha} [e^{-\lambda\tau_\beta} f(x_\beta)]\} =$$
$$= M_x \{e^{-\lambda\tau_\alpha} M_x \{\theta_{\tau_\alpha} [e^{-\lambda\tau_\beta} f(x_\beta)] \mid x_t, \quad t \leqslant \tau_\alpha\}\} = M_x \{e^{-\lambda\tau_\alpha} M_{x_\alpha} [e^{-\lambda\tau_\beta} f(x_\beta)]\},$$

что равносильно (3.2).

Лемма 3.2. *Оператор $\Pi_\lambda = \Pi_\lambda^1$ может быть записан формулой*

$$\Pi_\lambda f(x) = \frac{a(x)}{\lambda + a(x)} \int\limits_{\mathcal{E}} \Pi(x, dy) f(y). \tag{3.3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f \in D_{\widetilde{A}}$, и пусть $h = \lambda f - \widetilde{A} f$. По теореме 0.2

$$M_x [e^{-\lambda\tau_1} f(x_1)] = f(x) - M_x \int\limits_0^{\tau_1} e^{-\lambda t} h(x_t)\, dt =$$
$$= f(x) - h(x) M_x \int\limits_0^{\tau_1} e^{-\lambda t} dt = f(x) - h(x) M_x \left[\frac{1 - e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda}\right].$$

Опираясь на лемму 1.3, находим, что

$$M_x \left[\frac{1 - e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda + a(x)}$$

* Мы полагаем $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathcal{E}} |f(x)|$.

и, следовательно,

$$M_x[e^{-\lambda\tau_1}f(x_1)] = f(x) - \frac{h(x)}{\lambda + a(x)} \qquad (3.4)$$

С другой стороны, в силу теоремы 2.1

$$h(x) = \lambda f(x) - \widetilde{A}f(x) = \lambda f(x) - \mathfrak{A}f(x) = \lambda f(x) + a(x)f(x) - \\ - a(x)M_x f(x_1). \qquad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает (3.3). Итак, соотношение (3.3) выполняется для всех $f \in D_{\widetilde{A}}$. Но множество функций $f \in B$, для которых выполнено (3.3), замкнуто относительно слабой сходимости*. Поэтому вместе с $D_{\widetilde{A}}$ это множество содержит $\widetilde{B}_0$ (см. [2], $n°$ 12). Остается заметить, что в силу леммы 2.1 $\widetilde{B}_0 = B$.

Замечание. Равенство (3.3) означает, что для $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$ и любого $f \in B$ выполнено соотношение

$$M_x\varphi(\tau_1)f(x_1) = M_x\varphi(\tau_1)M_x f(x_1). \qquad (3.6)$$

Отсюда нетрудно вывести, что соотношение (3.6) выполнено для всех измеримых по Борелю ограниченных функций $\varphi(t)$ и $f \in B$. Полагая $\varphi = \chi_\Lambda$, $f = \chi_\Gamma$, где Λ и Γ — любые измеримые множества, соответственно, на полупрямой $[0, \infty)$ и в пространстве $\mathcal{E}$, получаем

$$P_x\{\tau_1 \in \Lambda,\ x_1 \in \Gamma\} = P_x\{\tau_1 \in \Lambda\}\,P_x\{x_1 \in \Gamma\},$$

что означает независимость случайных величин τ_1 и x_1.

§ 4. Первый способ описания области определения инфинитезимального оператора

12. Теорема 4.1. *Пусть λ — любое положительное число. Область определения оператора $\widetilde{A}$ можно описать как совокупность всех функций $f \in D_{\mathfrak{A}}$ таких, что $\Pi_\lambda^\alpha f(x)$ непрерывно зависит от $\alpha \in N$* (т. е. если $\alpha_1 \uparrow \alpha$, то $\Pi_\lambda^{\alpha_n} f(x) \to \Pi_\lambda^\alpha f(x)$ при любом x).

Замечание. Из формулировки теоремы видно, что если $\Pi_\lambda^\alpha f(x)$ для некоторого $f \in D_{\mathfrak{A}}$ непрерывно зависит от α при каком-нибудь $\lambda > 0$, то эта непрерывность имеет место и для всех $\lambda > 0$,

Доказательство. Пусть $f \in D_{\widetilde{A}}$. Положим $h = \lambda f - \widetilde{A}f$. Согласно теореме 0.2,

$$\Pi_\lambda^\alpha f(x) = M_x e^{-\lambda\tau_\alpha} f(x_\alpha) = f(x) - M_x \int_0^{\tau_\alpha} e^{-\lambda t} h(x_t)dt,$$

$$\Pi_\lambda^{\alpha_n} f(x) = M_x e^{-\lambda\tau_{\alpha_n}} f(x_{\alpha_n}) = f(x) - M_x \int_0^{\tau_{\alpha_n}} e^{-\lambda t} h(x_t)\,dt.$$

Если $\alpha_n \uparrow \alpha$, то $\tau_{\alpha_n} \uparrow \tau_\alpha$ и $\Pi_\lambda^{\alpha_n} f(x) \to \Pi_\alpha^\lambda f(x)$. Таким образом, $\Pi_\alpha^\lambda f(x)$ непрерывно зависит от α.

---

* Мы говорим, что f_n слабо сходится к f и пишем $f_n \xrightarrow{w} f$, если $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in \mathcal{E}$ и $\|f_n\|$ ограничены.

Предположим теперь, что $\Pi_\lambda^\alpha f(x)$ для некоторого $f \in D_{\mathfrak{A}}$ непрерывно зависит от α. Поскольку $\widetilde{B}_0 = B$ (лемма 2.1), то $h = \lambda f - \mathfrak{A} f$ принадлежит $\widetilde{B}_0$, и по теореме 0.1 функция $f_1 = R_\lambda h$ принадлежит $D_{\widetilde{A}}$ и удовлетворяет уравнению $\lambda f_1 - \widetilde{A} f_1 = h$. В силу теоремы 2.1 это уравнение можно записать в виде $\lambda f_1 - \mathfrak{A} f_1 = h$. Следовательно, разность $\delta = f - f_1$ удовлетворяет уравнению $\mathfrak{A}\delta = \lambda\delta$ или, что равносильно, уравнению $\Pi_\lambda^1 \delta = \delta$. Заметим еще, что поскольку $\Pi_\lambda^\alpha f$ и $\Pi_\lambda^\alpha f_1$ непрерывно зависят от α (первое по предположению, второе в силу включения $f_1 \in D_{\widetilde{A}}$), то такая непрерывность имеет место и для $\Pi_\lambda^\alpha \delta$.

Положим $\alpha \in N'$, если $\Pi_\lambda^\gamma \delta = \delta$. Очевидно, $0 \in N'$. По доказанному $\Pi_\lambda^1 \delta = \delta$, так что $1 \in N'$. В силу леммы 3.1 $\Pi_\lambda^{\alpha+1}\delta = \Pi_\lambda^\alpha \Pi_\lambda^1 \delta = \Pi_\lambda^\alpha \delta$. Поэтому если $\alpha \in N'$, то $\alpha + 1 \in N'$. Наконец, ввиду непрерывности $\Pi_\lambda^\alpha f(x)$ относительно α, из $\alpha_n \in N'$ и $\alpha_n \uparrow \alpha$ следует, что $\alpha \in N'$. По принципу трансфинитной индукции $N' = N$, и уравнение $\Pi_\lambda^\alpha \delta = \delta$ удовлетворяется для всех $\alpha \in N$. Но, как было показано в $n°6$, $P_x\{\tau_\alpha = +\infty\} = 1$ для некоторого $\alpha \in N$ и, следовательно, $\Pi_\lambda^\alpha \delta(x) = 0$. Стало быть, $\delta(x) = 0$ и $f = f_1 \in D_{\widetilde{A}}$.

13. Из теоремы 4.1 можно сделать следующий важный вывод: переходные вероятности скачкообразного процесса однозначно определяются заданием функций $a(x)$ и

$$\Pi(\gamma, x, \Gamma) = \int\limits_{x_\gamma \in \Gamma} e^{-\lambda\tau_\gamma} P_x(d\omega) \quad (x \in \mathcal{E},\ \Gamma \in \mathfrak{B}),$$

для какого-нибудь $\lambda > 0$ и всех неразложимых трансфинитных чисел γ.

В самом деле, очевидно,

$$\Pi_\lambda^\gamma f(x) = \int\limits_{\mathcal{E}} \Pi(\gamma, x, dy) f(y),$$

так что задание функций $\Pi(\gamma, x, \Gamma)$ определяет операторы Π_λ^γ для всех неразложимых γ. С помощью формулы (3.3) можно вычислить функцию $\Pi(x, \Gamma)$ и восстановить оператор $\mathfrak{A}$. Наконец, опираясь на соотноше- (3.2), можно найти Π_λ^α для всех $\alpha \in N$. Таким образом, мы можем построить оператор $\widetilde{A}$, который, как уже говорилось в $n°4$, определяет однозначно переходные вероятности процесса.

Функция $\Pi(\gamma, x, \Gamma)$ обладает, очевидно, следующими свойствами:

А. $\Pi(\gamma, x, \Gamma)$ является мерой относительно Γ, причем, $\Pi(\gamma, x, \mathcal{E}) \leqslant 1$.

Б. $\Pi(\gamma, x, \Gamma)$ есть $\mathfrak{B}$-измеримая функция от x.

В. Если $\gamma_1 < \gamma_2$, то

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \Pi(\gamma_1, x, dy)\, \Pi(\gamma_2, y, \Gamma) = \Pi(\gamma_2, x, \Gamma).$$

Остается открытым вопрос о том, какие требования надо присоединить к условиям А -- В для того, чтобы пара функций $a(x)$, $\Pi(\gamma, x, \Gamma)$ соответствовала какому-нибудь скачкообразному процессу.

Замечание. Для резольвенты $R_\lambda f$, скачкообразного процесса x_t, определенной формулой (0.7), можно дать следующее простое выражение

$$R_\lambda h(x) = \sum_{\alpha \in N} \Pi_\lambda^\alpha \left[\frac{h}{\lambda + a}\right].$$

Чтобы вывести это выражение, надо разбить правую часть (0.7) на слагаемые

$$M_x \int_{\tau_\alpha}^{\tau_{\alpha+1}} e^{-\lambda t} h(x_t)\, dt,$$

заметить, что

$$\int_{\tau_\alpha}^{\tau_{\alpha+1}} e^{-\lambda t} h(x_t)\, dt = h(x_\alpha)\left[\frac{e^{-\lambda\tau_\alpha} - e^{-\lambda\tau_{\alpha+1}}}{\lambda}\right] = h(x_\alpha)\, e^{-\lambda\tau_\alpha}\theta_{\tau_\alpha}\left[\frac{1 - e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda}\right],$$

и применить формулу (0.2).

§ 5. Инфинитезимальный оператор полугруппы T_t^γ и критерий ступенчатости процесса

14. Теорема 5.1. *Пусть γ — неразложимое трансфинитное число. Формула*

$$T_t^\gamma f(x) = \int_{\tau_\gamma > t} f(x_t)\, P_x(d\omega) \qquad (5.1)$$

определяет полугруппу операторов в пространстве B. Ее слабый инфинитезимальный оператор $\widetilde{A}_\gamma$ является сужением оператора $\mathfrak{A}$ в области, состоящей из всех функций $f \in D_{\mathfrak{A}}$ таких, что $\Pi_\lambda^\alpha f(x)$ непрерывно зависит от α при $\alpha < \gamma$ и стремится к нулю при $\alpha \uparrow \gamma$ (λ — произвольное фиксированное положительное число).

Доказательство. Обозначим χ_s индикатор множества $\{\omega : \tau_\gamma(\omega) > t\}$. В силу (1.7) $\chi_s \theta_s \chi_t = \chi_{s+t}$ и, следовательно,

$$\chi_{s+t} f(x_{s+t}) = \chi_s \theta_s [\chi_t f(x_t)].$$

Опираясь на формулу (0.2), имеем

$$M_x \chi_{s+t} f(x_{s+t}) = M_x \{\chi_s \theta_s [\chi_t f(x_t)]\} = M_x \{\chi_s M_x \{\theta_s [\chi_t f(x_t)] \mid x_u,\ u \leqslant s\}\} = M_x \{\chi_s M_{x_s} [\chi_t f(x_t)]\},$$

что равносильно соотношению $T_{s+t}^\gamma f = T_s^\gamma T_t^\gamma f$.

Просматривая доказательство теоремы 1 работы [3], нетрудно заметить, что соотношение (0.8) сохраняет силу для полугруппы T_t^γ и случайных величин τ_α ($\alpha + \gamma$). Для случайной величины τ_γ это соотношение должно быть заменено следующим:

$$f(x) = M_x \int_0^{\tau_\gamma} e^{-\lambda t} h(x_t)\, dt.$$

Опираясь на эти соотношения и повторяя почти дословно доказательство теорем 3.1 и 4.1, убеждаемся в справедливости всех утверждений теоремы 5.1.

Из теоремы 51. видно, что полугруппа T_t^γ однозначно определяется функцией $a(x)$ и набором операторов Π_λ^β (λ — какое-нибудь фиксированное положительное число, β пробегает все неразложимые трансфинитные числа, меньшие γ). В частности, полугруппа T_t^ω * однозначно определяется функцией $a(x)$ и оператором $\Pi_\lambda = \Pi_\lambda^1$, или, если угодно, функциями $a(x)$ и $\Pi(x, \Gamma)$, или, наконец, оператором $\mathfrak{A}$. Оператор $\widetilde{A}_\omega$ есть сужение оператора $\mathfrak{A}$ в области, составленной из всех функций $f \in D_{\mathfrak{A}}$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_\lambda^n f(x) = 0.$$

15. Скачкообразный марковский процесс мы будем называть ступенчатым, если с вероятностью 1 за каждый конечный промежуток времени происходит лишь конечное число скачков, иначе говоря, если $P_x\{\tau_\omega = +\infty\} = 1$ для любого $x \in \mathcal{E}$.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы скачкообразный марковский процесс являлся ступенчатым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:*

А. $\mathfrak{A} = \widetilde{A}$,

Б. $\lim_{n\to\infty} \Pi_\lambda^n 1 = 0$ *для некоторого* $\lambda > 0$,

В. $\lim_{n\to\infty} \Pi_\lambda^n f = 0$ *при любых* $\lambda > 0$, $f \in B$.

Доказательство. Если процесс ступенчатый, то для любых $\lambda > 0$, $f \in B$

$$\Pi_\lambda^\omega f(x) = M_x e^{-\lambda\tau_\omega} \cdot f(x_\omega) = 0.$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} \Pi_\lambda^n f(x) = \lim_{n\to\infty} M_x e^{-\lambda\tau_n} f(x_n) = 0$, т. е. выполнено условие В. Условие Б есть тривиальное следствие В. Далее, из теоремы 4.1 видно, что в рассматриваемом случае область определения оператора $\widetilde{A}$ совпадает с $D_{\mathfrak{A}}$ и, следовательно, выполнено условие А. Необходимость условий А, Б, В доказана.

Докажем, что каждое из этих условий является достаточным. Если выполнено Б и, тем более, если выполнено В, то для некоторого $\lambda > 0$

$$M_x e^{-\lambda\tau_\omega} = \lim_{n\to\infty} M_x e^{-\lambda\tau_n} = \lim_{n\to\infty} \Pi_\lambda^n 1 = 0.$$

Следовательно, $P_x\{\tau_\omega = +\infty\} = 1$ и процесс x_t ступенчатый. Предположим теперь, что выполнено условие А. Согласно теореме 5.1, $\widetilde{A}_\omega \subseteq \mathfrak{A}$ и, в силу условия А, $\widetilde{A}_\omega \subseteq \widetilde{A}$. Поэтому $\lambda E - \widetilde{A}_\omega \subseteq \lambda E - \widetilde{A}$. Согласно теореме 0.1 и лемме 2.1, оператор $\lambda E - \widetilde{A}$ отображает взаимно однозначно $D_{\widetilde{A}}$ на $\widetilde{B}_0 = B$. Если бы $\widetilde{A}_\omega \neq \widetilde{A}$, то оператор $\lambda E - \widetilde{A}_\omega$ отображал бы $D_{\widetilde{A}_\omega}$ на собственное подмножество пространства B. Однако в действительности теорема 0.1 и лемма 2.1 справедливы и для полугруппы

* Через ω обозначается наименьшее среди бесконечных трансфинитных чисел.

T_t^ω *. Поэтому $\lambda E - \widetilde{A}_\omega$ отображает $D_{\widetilde{A}_\omega}$ на B. Таким образом, $\widetilde{A}_\omega = \widetilde{A} = \mathfrak{A}$. Поскольку $1 \in D_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}1 = 0$, то $1 \in D_{\widetilde{A}_\omega}$ и $\widetilde{A}_\omega 1 = 0$. Отсюда вытекает (см. [2], стр. 30 и 33), что $T_t^\omega 1 = 1$ при любом $t \geqslant 0$. Но, как видно из формулы (5.1), $T_t^\omega 1 = P_x\{\tau_\omega > t\}$. Следовательно, $P_x\{\tau_\omega = +\infty\} = 1$, и процесс x_t — ступенчатый.

§ 6. Вспомогательные леммы

16. Более глубокое исследование инфинитезимальных операторов скачкообразных процессов, которое будет проведено в § 8, требует некоторой предварительной подготовки. Этой подготовке и посвящены §§ 6 и 7.

Пусть γ — неразложимое трансфинитное число. Обозначим $\mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}$ минимальную σ-алгебру, содержащую $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}$, и $\mathfrak{M}_\gamma$ σ-алгебру, порожденную множествами $\{\omega : x_\alpha(\omega) \in \Gamma\}$ $(\alpha < \gamma,\ \Gamma \in \mathfrak{B})$.

Условимся писать $\xi \approx \eta$, если $P_x(\xi \neq \eta) = 0$ при любом $x \in \mathcal{E}$. Будем писать $A \approx B$, если $\chi_A \approx \chi_B$, или, что равносильно, если $P_x(A/AB) = P_x(B \setminus AB) = 0$ для любого $x \in \mathcal{E}$.

Положим $\Omega_\gamma = \{\omega : \tau_\gamma(\omega) < +\infty\}$. Подмножество A множества Ω_γ отнесем к системе $\mathfrak{N}_\gamma$, если найдется $B \approx A$ такое, что $B \in \mathfrak{M}_\gamma$ и $\theta_{\tau_\alpha} B = B$ при всех $\alpha < \gamma$. Очевидно, $\mathfrak{N}_\gamma$ есть σ-алгебра в пространстве Ω_γ. Отметим, что функция $\xi(\omega)$, заданная на Ω_γ, является $\mathfrak{N}_\gamma$-измеримой тогда и только тогда, когда найдется функция $\eta \approx \xi$, измеримая относительно $\mathfrak{M}_\gamma$ и такая, что $\theta_{\tau_\alpha}\eta = \eta$ для всех $\alpha < \gamma$.

17. Лемма 6.1. *Пусть $f \in B$ и $\Pi^\alpha f \geqslant f$ для всех $\alpha < \gamma$. Тогда*

$$\{\omega : \lim_{\alpha \uparrow \gamma} f(x_\alpha) \text{ существует}\} \approx \Omega_\gamma \tag{6.1}$$

и

$$M_x(\lim_{\alpha \uparrow \gamma} f(x_\alpha)\} \geqslant f(x) \tag{6.2}$$

Доказательство. Положим $y_\alpha = f(x_\alpha)$. Пусть $\alpha < \beta < \gamma$. Тогда $\beta = \alpha + \delta$ $(\delta < \gamma)$. В силу (16) $\theta_{\tau_\alpha} y_\delta = y_{\alpha+\delta} = y_\beta$ и, в силу (0.2),

$$M_x\{y_\beta \mid \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}\} = M_x\{\theta_{\tau_\alpha} y_\delta \mid \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}\} = M_{x_\alpha} y_\delta = \Pi^\delta f(x_\alpha) \geqslant f(x_\alpha) = y_\alpha.$$

Следовательно, система $(y_\alpha, \mathfrak{M}_{\tau_\alpha})$ $(0 \leqslant \alpha < \gamma)$ есть полумартингал, и утверждения леммы вытекают из основной теоремы сходимости для полумартингалов (см., например [12], стр. 291, теорема 4.1*s*).

Лемма 6.2. *Если $\theta_{\tau_\alpha}\xi \geqslant \xi$ для всех $\alpha < \gamma$, то*

$$\{\omega : \lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha}\xi \text{ существует}\} \approx \Omega_\gamma. \tag{6.3}$$

Если $\theta_{\tau_\alpha}\xi = \xi$ для всех $\alpha < \gamma$, то для почти всех $\omega \in \Omega_\gamma$

---

* Теорема 0.1 выполняется для любой полугруппы T_t линейных операторов в пространстве B, удовлетворяющих условию $\|T_t f\| \leqslant \|f\|$ и сохраняющих слабую сходимость функций. Это нетрудно обнаружить, просматривая доказательства, приведенные в работе [2].

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha}\xi = M_x\{\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}\} = M_x\{\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\gamma}\} = M_x\{\xi \mid \mathfrak{N}_\gamma\}. \tag{6.4}$$

Наконец, если ξ $\mathfrak{N}_\gamma$*-измерима, то для почти всех* $\omega \in \Omega_\gamma$

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha}\xi = \xi. \tag{6.5}$$

Доказательство. Положим $f(x) = M_x\xi$. Если $\theta_{\tau_\alpha}\xi \geqslant \xi$, то

$$f(x) = M_x\xi \leqslant M_x[\theta_{\tau_\alpha}\xi] = M_x M_x[\theta_{\tau_\alpha}\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}] = M_x M_{x_\alpha}\xi = M_x f(x_\alpha) = \Pi^\alpha f(x),$$

и первое утверждение леммы вытекает из леммы 6.1. Далее, если $\theta_{\tau_\alpha}\xi = \xi$, то

$$M_x(\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}) = M_x\{\theta_{\tau_\alpha}\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}\} = M_{x_\alpha}\xi. \tag{6.6}$$

Поскольку $\mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}$ есть минимальная σ-алгебра, содержащая $\bigcup_{\alpha < \gamma} \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}$, и поскольку для любых $\alpha < \beta$ выполнено включение $\mathfrak{M}_{\tau_\alpha} \subseteq \mathfrak{M}_{\tau_\beta}$, то по известной теореме об условных математических ожиданиях (см., например, [13], стр. 297, теорема 4.3) имеем для почти всех

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_x(\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\alpha}) = M_x(\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}). \tag{6.7}$$

Из (6.6) и (6,7) следует, что для почти всех ω

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha}\xi = M_x(\xi \mid \mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}). \tag{6.8}$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, очевидно, инвариантна относительно операторов $\theta_{\tau_\alpha}(\alpha < \gamma)$ и измерима относительно $\mathfrak{M}_\gamma$. Следовательно, она измерима также и относительно σ-алгебры $\mathfrak{N}_\gamma$. Поскольку $\mathfrak{N}_\gamma \subseteq \mathfrak{M}_\gamma \subseteq \mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}$, то из (6.8) следуют равенства (6.4).

Чтобы вывести (6.5), достаточно заметить, что если ξ $\mathfrak{N}_\gamma$-измерима, то $M_x(\xi \mid \mathfrak{N}_\gamma) = \xi$ для почти всех $\omega \in \Omega_\gamma$.

Лемма 6.3. *Для любых* $h > 0$, $x \in \mathcal{E}$

$$\{\omega : \lim_{\alpha \uparrow \gamma} P_{x_\alpha}(\tau_\gamma < h) = \chi_{\Omega_\gamma}\} \approx \Omega_\gamma. \tag{6.9}$$

Доказательство. В силу (1.5′) функция

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_\gamma < h, \\ 0, & \text{если } \tau_\gamma \geqslant h, \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $\theta_{\tau_\alpha}\xi \geqslant \xi$ при любом $\alpha < \gamma$. По лемме 6.2 для почти всех $\omega \in \Omega_\gamma$ существует предел

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha}\xi = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} P_{x_\alpha}\{\tau_\gamma < h\} = \eta. \tag{6.10}$$

Очевидно, η измерима относительно $\mathfrak{M}_\gamma$ и $\theta_{\tau_\alpha}\eta = \eta$ при любом $\alpha < \gamma$. Следовательно, η $\mathfrak{N}_\gamma$-измерима и по лемме 6.2 для почти всех $\omega \in \Omega_\gamma$

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha}\eta = \eta.$$

Но в силу (6.10), (0.3) и (1.5′)

$$M_x\eta = \lim_{\alpha\uparrow\gamma} M_x P_{x_\alpha}\{\tau_\gamma < h\} = \lim_{\alpha\uparrow\gamma} P_x[\theta_{\tau_\alpha}\{\tau_\gamma < h\}] =$$
$$= \lim_{\alpha\uparrow\gamma} P_x\{\tau_\gamma < \tau_\alpha + h\} = P_x\{\tau_\gamma < +\infty\} = P_x(\Omega_\gamma).$$

Следовательно,

$$\eta = \lim_{\alpha\uparrow\gamma} P_{x_\alpha}(\Omega_\gamma).$$

Поскольку $\Omega_\gamma \in \mathfrak{N}_\gamma$, то по лемме 6.2 последний предел равен χ_{Ω_γ} для почти всех $\omega \in \Omega_\gamma$.

§ 7. Строение σ-алгебры $\mathfrak{N}_\gamma$

18. Теорема 7.1*. *Положим*

$Q_\Gamma^\gamma = \{\omega\colon \tau_\gamma(\omega) < \infty$ и существует $\alpha < \gamma$ такое, что $x_\beta \in \Gamma$ для $\alpha < \beta < \gamma\}$. *Пусть* $A \in \Omega_\gamma$. *Для того, чтобы* $A \in \mathfrak{N}_\gamma$, *необходимо и достаточно, чтобы* $A \approx Q_\Gamma^\gamma$ *для некоторого* $\Gamma \in \mathfrak{B}$. *Ограниченная функция* $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega_\gamma)$ *является* $\mathfrak{N}_\gamma$*-измеримой тогда и только тогда, когда*

$$\xi \approx \lim_{\alpha\uparrow\gamma} f(x_\alpha) \tag{7.1}$$

для некоторого $f \in B$**.

Доказательство. Имеем

$$Q_\Gamma^\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \bigcap_{\alpha<\beta<\gamma} \{\Omega_\gamma, x_\beta \in \Gamma\}.$$

Отсюда видно, что $Q_\Gamma^\gamma \in \mathfrak{N}_\gamma$ и, следовательно, $A \in \mathfrak{N}_\gamma$ если $A \approx Q_\Gamma^\gamma$.

$\mathfrak{N}_\gamma$-измеримость функции ξ, удовлетворяющей (7.1), очевидна. Далее, если ξ — любая $\mathfrak{N}_\gamma$-измеримая функция, то согласно лемме 6.2

$$\xi \approx \lim_{\alpha\uparrow\gamma} M_{x_\alpha}\xi \tag{7.2}$$

и соотношение (7.1) выполнено при $f(x) = M_x\xi$. Остается показать, что если $A \in \mathfrak{N}_\gamma$, то найдется такое $\Gamma \in \mathfrak{B}$, что $A \approx Q_\Gamma^\gamma$. Полагая в формуле (7.2) $\xi = \chi_A$, имеем

$$\chi_A \approx \lim_{\alpha\uparrow\gamma} M_{x_\alpha}\chi_A = \lim_{\alpha\uparrow\gamma} P_{x_\alpha}(A).$$

Поэтому $A \approx Q_\Gamma^\gamma$ для $\Gamma = \left\{x : P_x(A) > \frac{1}{2}\right\}$.

19. Обозначим ξ_Γ первый момент t, для которого $x_t \overline{\in} \Gamma$, и положим $\tau_{\gamma,\Gamma} = \min(\tau_\gamma, \xi_\Gamma)$.

Теорема 7.2. *Множество* Γ *в теореме* 7.1 *можно выбрать так, чтобы* $M_x\tau_{\gamma,\Gamma} < \infty$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $\Gamma_1 \in \mathfrak{B}$. Положим

$$\Gamma = \left\{x : x \in \Gamma_1,\ P_x\{\tau_\gamma < 1\} > \frac{1}{2}\right\}.$$

* Теорема, по существу равносильная теореме 7.1, была впервые доказана в несколько иной обстановке Д. Блэквеллом [9].

** Из приведенного ниже доказательства видно, что можно рассматривать только функции f, удовлетворяющие уравнениям $\Pi^\alpha f = f$ для всех $\alpha < \gamma$.

Очевидно $Q^{\gamma}_{\Gamma_1} \subseteq Q^{\gamma}_{\Gamma}$ и $Q^{\gamma}_{\Gamma} \setminus Q^{\gamma}_{\Gamma_1} \subseteq A$, где $A = \{\omega : \tau_{\gamma}(\omega) < \infty\}$ и существует последовательность $\alpha_n \uparrow \alpha$ такая, что

$$P_{x_{\alpha_n}}\{\tau_{\gamma} < 1\} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Из леммы 6.3 вытекает, что $P_x(A) = 0$ при всех $x \in \mathcal{E}$ и, следовательно, $Q^{\gamma}_{\Gamma} \approx Q^{\gamma}_{\Gamma_1}$.

Положим теперь для краткости $\eta = \tau_{\gamma,\Gamma}$ и покажем, что $M_x\eta < \infty$. Легко видеть, что для любого n

$$\{\eta > n\} = \{\eta > n-1,\ \theta_{n-1}[\eta > 1]\}.$$

В силу (0.3) отсюда вытекает, что

$$P_x(\eta > n) = \int\limits_{\tau > n-1} P_{x(n-1)}\{\eta > 1\}\, P_x(d\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tau > n-1} P_{x(n-1)}\{\tau_{\gamma} > 1\}\, P_x(d\omega) \leqslant \frac{1}{2} P_x\{\eta > n-1\}.$$

Стало быть, $P_x(\eta > n) \leqslant \frac{1}{2}$ и $M_x\eta = \int\limits_0^{\infty} P_x(\eta > t)\, dt \leqslant 2$.

§ 8. Второй способ описания области определения инфинитезимального оператора

20. Теорема 8.1. *Область определения слабого инфинитезимального оператора $\widetilde{A}$ скачкообразного процесса x_t состоит из всех функций $f \in D_{\mathfrak{A}}$, удовлетворяющих для каждого неразложимого трансфинитного числа γ условию* *

$$M_x\{f(x_{\gamma}) \mid \mathfrak{N}_{\gamma}\} = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \overline{\lim_{\beta \uparrow \gamma}}\, \Pi^{\beta} f(x_{\alpha}) \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть $f \in D_{\widetilde{A}}$, $g = \widetilde{A}f$ и пусть $M_x\tau_{\gamma,\Gamma} < \infty$ для всех $x \in \mathcal{E}$. Применяя к величинам $\eta = \tau_{\gamma,\Gamma}$ и $\eta_{\alpha} = \tau_{\alpha,\Gamma}$ теорему 0.2, имеем

$$M_x f(x_{\eta}) = f(x) + M_x \int\limits_0^{\eta} g(x_t)\, dt;$$

$$M_x f(x_{\eta_{\alpha}}) = f(x) + M_x \int\limits_0^{\eta_{\alpha}} g(x_t)\, dt.$$

Отсюда

$$M_x f(x_{\eta}) = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_x f(x_{\eta_{\alpha}}). \tag{8.2}$$

---

* Из доказательства теоремы нетрудно усмотреть, что если $\lim\limits_{\alpha \uparrow \gamma} f(x_{\alpha})$ существует для почти всех $\omega \in \Omega_{\gamma}$, то условие (8.1) можно заменить более простым условием

$$M_x\{f(x_{\gamma}) \mid \mathfrak{N}_{\gamma}\} = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} f(x_{\alpha}).$$

Заметим, что

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} \int\limits_{\xi_\Gamma < \tau_\alpha} f(x_{\eta_\alpha}) P_x(d\omega) = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \int\limits_{\xi_\Gamma < \tau_\alpha} f(x_{\xi_\Gamma}) P_x(d\omega) =$$
$$= \int\limits_{\xi_\Gamma < \tau_\gamma} f(x_{\xi_\Gamma}) P_x(d\omega) = \int\limits_{\xi_\Gamma < \tau_\gamma} f(x_\eta) P_x(d\omega). \tag{8.3}$$

Из (8.2) и (8.3) следует, что

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} \int\limits_{\xi_\Gamma \geqslant \tau_\alpha} f(x_\alpha) P_x(d\omega) = \int\limits_{\xi_\Gamma \geqslant \tau_\gamma} f(x_\gamma) P_x(d\omega). \tag{8.4}$$

Положим

$$\chi_{\alpha,\, \alpha+\beta}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_\gamma(\omega) < \infty \text{ и } x_\delta \in \Gamma \text{ для } \alpha < \delta < \alpha + \beta, \\ 0 & \text{для остальных } \omega. \end{cases}$$

Формулу (8.4) можно переписать в виде

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_x \chi_{0,\alpha} f(x_\alpha) = M_x \chi_{0,\gamma} f(x_\gamma). \tag{8.5}$$

Пусть $Q = Q_\Gamma^\gamma$. Очевидно,

$$\chi_Q = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \chi_{\alpha,\gamma} = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \lim_{\beta \uparrow \gamma} \chi_{\alpha,\, \alpha+\beta}. \tag{8.6}$$

Поэтому

$$M_x \chi_Q f(x_\gamma) = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_x \chi_{\alpha,\gamma} f(x_\gamma). \tag{8.7}$$

Но

$$\chi_{\alpha,\gamma} f(x_\gamma) = \theta_{\tau_\alpha} [\chi_{0,\gamma} f(x_\gamma)],$$

и поэтому

$$M_x \chi_{\alpha,\gamma} f(x_\gamma) = M_x M_{x_\alpha} [\chi_{0,\gamma} f(x_\gamma)]. \tag{8.8}$$

Сопоставляя (8.5) и (8.8), имеем

$$M_x \chi_{\alpha,\gamma} f(x_\gamma) = \lim_{\beta \uparrow \gamma} M_x M_{x_\alpha} \chi_{0,\beta} f(x_\beta). \tag{8.9}$$

С другой стороны,

$$M_x \chi_{\alpha,\, \alpha+\beta} f(x_{\alpha+\beta}) = M_x \{\theta_\alpha [\chi_{0,\beta} f(x_\beta)]\} = M_x M_{x_\alpha} [\chi_{0,\beta} f(x_\beta)]. \tag{8.10}$$

Из (8.7), (8.9) и (8.10)

$$M_x \chi_Q f(x_\gamma) = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \lim_{\beta \uparrow \gamma} M_x \chi_{\alpha,\, \alpha+\beta} f(x_{\alpha+\beta}). \tag{8.11}$$

Заметим далее, что

$$|M_x [\chi_Q - \chi_{\alpha,\, \alpha+\beta}] f(x_{\alpha+\beta})| \leqslant \|f\| M_x |\chi_Q - \chi_{\alpha,\, \alpha+\beta}|.$$

Опираясь на (8.6), заключаем отсюда, что

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} \lim_{\beta \uparrow \gamma} M_x [\chi_Q - \chi_{\alpha,\, \alpha+\beta}] f(x_{\alpha+\beta}) = 0$$

и, в силу (8.11)

$$M_x \chi_Q f(x_\gamma) = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \lim_{\beta \uparrow \gamma} M_x \chi_Q f(x_{\alpha+\beta}) = \lim_{\beta \uparrow \gamma} M_x \chi_Q f(x_\beta). \tag{8.12}$$

Применим теперь к случайной величине $\xi = \chi_Q f(x_\gamma)$ лемму 6.2. В силу этой леммы

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha} \xi = M_x \{\xi \mid \mathfrak{M}_\gamma\}$$

и, следовательно,

$$M_x \{\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha} \xi\} = M_x \xi,$$

т. е.

$$M_x \{\chi_Q f(x_\gamma)\} = M_x \{\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha} [\chi_Q f(x_\gamma)]\}. \tag{8.13}$$

Сопоставляя (8.12) и (8.13), имеем

$$M_x \chi_Q f(x_\gamma) = M_x \{\lim_{\alpha \uparrow \gamma} \lim_{\beta \uparrow \gamma} M_{x_\alpha} [\chi_Q f(x_\beta)]\}. \tag{8.14}$$

Положим

$$\xi_{\alpha,\beta} = M_{x_\alpha} [\chi_Q f(x_\beta)] - \chi_Q M_{x_\alpha} f(x_\beta).$$

и заметим, что при $\omega \bar{\in} Q$

$$|\xi_{\alpha,\beta}| \leqslant M_{x_\alpha} \chi_Q |f(x_\beta)| \leqslant \|f\| M_{x_\alpha} \chi_Q;$$

при $\omega \in Q$

$$|\xi_{\alpha,\beta}| \leqslant M_{x_\alpha} |\chi_Q - 1| \, |f(x_\beta)| \leqslant \|f\| [1 - M_{x_\alpha} \chi_Q].$$

В силу леммы 6.2 для почти всех $\omega \in \Omega_\gamma$.

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha} \chi_Q = \chi_Q.$$

Поэтому

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} \overline{\lim_{\beta \uparrow \gamma}} \xi_{\alpha,\beta} = 0. \tag{8.15}$$

Из (8.14) и (8.15) следует, что

$$M_x [\chi_Q f(x_\gamma)] = M_x \{\lim_{\alpha \uparrow \gamma} \overline{\lim_{\beta \uparrow \gamma}} \chi_Q M_{x_\alpha} f(x_\beta)\}$$

и, стало быть,

$$\int_Q f(x_\gamma) P_x(d\omega) = \int_Q \Phi(\omega) P_x(d\omega),$$

где

$$\Phi(\omega) = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \overline{\lim_{\beta \uparrow \gamma}} M_{x_\alpha} f(x_\beta). \quad (\omega \in \Omega_\gamma)$$

Опираясь на теоремы 7.1 и 7.2, мы можем отсюда заключить, что соотношение (8.16) выполняется для всякого $Q \in \mathfrak{N}_\gamma$. Из теоремы 7.1 кроме того следует, что функция $\Phi(\omega)$ является $\mathfrak{N}_\gamma$-измеримой. Следовательно, по определению условного математического ожидания

$$M_x \{f(x_\gamma) \mid \mathfrak{N}_\gamma\} = \Phi(\omega).$$

Итак, мы показали, что для любой функции f из области $D_{\tilde{A}}$ выполнено соотношение (8.1).

21. Предположим теперь, что $f \in D_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}f = \lambda f$, и докажем, что если f удовлетворяет соотношениям (8.1) для всех неразложимых трансфинитных чисел γ, то $f = 0$. Согласно $n°6$, для каждого $x \in \mathfrak{S}$ найдется $\alpha \in N$ такое, что $\Pi_\lambda^\alpha f(x) = 0$. Поэтому наше утверждение будет доказано, если мы убедимся, что

$$\Pi_\lambda^\alpha f(x) = f(x) \tag{8.16}$$

для всех $\alpha \in N$.

Обозначим через N' совокупность всех $\alpha \in N$, для которых соотношение (8.16) справедливо. Очевидно, $0 \in N'$. В силу условия $\mathfrak{A}f = \lambda f$, $1 \in N'$. Покажем, что если N' содержит все α, меньшие некоторого γ, то N' содержит γ.

Если γ разложимо, т. е. $\gamma = \alpha + \beta$, где $\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$, то в силу (3.2)

$$\Pi_\lambda^\gamma f = \Pi_\lambda^\alpha \Pi_\lambda^\beta f = f.$$

Пусть теперь γ неразложимо и больше 1. По предположению

$$\Pi_\lambda^\alpha f = f, \quad (\alpha < \gamma) \tag{8.17}$$

Отсюда

$$|f| \leqslant \Pi_\lambda^\alpha |f|. \tag{8.18}$$

Положим

$$f_1 = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f_2 = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Из (8.17) и (8.18) $\Pi_\lambda^\alpha f_k \geqslant f_k$ $(k = 1, 2)$. Но для любого $f \geqslant 0$

$$\Pi^\alpha f(x) = \int_{\Omega_\alpha} f(x_\alpha) P_x(d\omega) \geqslant \int_{\Omega_\alpha} e^{-\tau_\alpha} f(x_\alpha) P_x(d\omega) = \Pi_\lambda^\alpha f(x).$$

Поэтому $\Pi^\alpha f_k \geqslant f_k$ $(k = 1, 2)$ при всех $\alpha < \gamma$, и по лемме 6.1 для почти всех $\omega \in \Omega_\gamma$ существует $\lim\limits_{\alpha \uparrow \gamma} f_k(x_\alpha)$, а, стало быть, существует и

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} f(x_\alpha) = \xi, \tag{8.19}$$

Из (8.19)

$$\lim_{\beta \uparrow \gamma} M_x f(x_\beta) = M_x \{\lim_{\beta \uparrow \gamma} f(x_\beta)\} = M_x \xi,$$

и соотношение (8.1) принимает вид

$$M_x \{f(x_\gamma) \mid \mathfrak{N}_\gamma\} = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha} \xi. \tag{8.20}$$

По лемме 6.2 $\lim\limits_{\alpha \uparrow \gamma} M_{x_\alpha} \xi = \xi$, и из (8.19) и (8.20)

$$M_x (f(x_\gamma) \mid \mathfrak{N}_\gamma\} = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} f(x_\alpha). \tag{8.21}$$

В силу (8.21)

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} e^{-\tau_\alpha} f(x_\alpha) = e^{-\tau_\gamma} \lim_{\alpha \uparrow \gamma} f(x_\alpha) = e^{-\tau_\gamma} M_x \{f(x_\gamma) \mid \mathfrak{N}_\gamma\}. \tag{8.22}$$

Но поскольку $\theta_{\tau_\alpha} f(x_\gamma) = f(x_\gamma)$ для всех $\alpha < \gamma$, то по лемме 6.2 $M_x \{f(x_\gamma) \mid \mathfrak{N}_\gamma\} = M_x \{f(x_\gamma) \mid \mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}\}$ и, принимая во внимание, что функ-

ция $e^{-\tau_\gamma}$ измерима относительно $\mathfrak{M}_{\tau_\gamma - 0}$, можно переписать (8.22) в виде

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} e^{-\tau_\alpha} f(x_\alpha) = M_x \{ e^{-\tau_\gamma} f(x_\gamma) \mid \mathfrak{N}_\gamma \}.$$

Отсюда

$$\lim_{\alpha \uparrow \gamma} \Pi_\lambda^\alpha f(x) = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} M_x \{ e^{-\tau_\alpha} f(x_\alpha) \} = M_x \{ e^{-\tau_\gamma} f(x_\gamma) \} = \Pi_\lambda^\gamma f(x)$$

и, в силу (8.17), $\Pi_\lambda^\gamma f = f$ и $\gamma \in N'$.

22. Теперь мы можем показать, что всякая функция $f \in D_{\mathfrak{A}}$, удовлетворяющая условиям (8.1), принадлежит области $D_{\widetilde{A}}$. Положим $\lambda f - \mathfrak{A} f = h$. По лемме 2.1 $h \widetilde{\in} B_0$, и по теореме 0.1 найдется $f_1 \in D_{\widetilde{A}}$ такое, что $\lambda f_1 - \widetilde{A} f_1 = h$. Поскольку $\widetilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$ (теорема 2.1), то имеет место равенство $\lambda f_1 - \mathfrak{A} f_1 = h$. Следовательно, $\delta = f - f_1$ удовлетворяет уравнению $\lambda \delta = \mathfrak{A} \delta$. Условия (8.1) выполняются для f по предположению, для f_1 в силу n^0 20. Следовательно, эти условия выполняются и для функции δ. Согласно n^0 21, $\delta = 0$. Стало быть, $f = f_1 \in D_{\widetilde{A}}$. Теорема 8.1 доказана.

23. Теорема 8.1 дает возможность обозреть класс всех скачкообразных процессов, отвечающих заданным функциям $a(x)$ и $\Pi(x, \Gamma)$ (или, что то же самое, заданному оператору $\mathfrak{A}$). Прежде всего, не ограничивая существенно общности*, можно считать, что пространство Ω состоит из всевозможных трансфинитных последовательностей $\{t_\alpha, x_\alpha\}$ $(\alpha \in N)$, где $x_\alpha \in \mathcal{E}$, $0 \leqslant t_\alpha \leqslant +\infty$ и удовлетворяют условиям: 1) если $\alpha < \beta$ и $t_\alpha < +\infty$, то $t_\alpha < t_\beta$; 2) $\lim\limits_{\alpha_n \uparrow \gamma} t_{\alpha_n} = t_\alpha$. Функция $x(t, \omega)$ определяется при этом формулой $x(t, \omega) = x_\alpha$ для $\omega = \{t_\alpha, x_\alpha\}$, $t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1})$.

Из теоремы 8.1 видно, что инфинитезимальный оператор, а, стало быть, и переходные вероятности скачкообразного процесса полностью определяются, если в дополнение к функциям $a(x)$, $\Pi(x, \Gamma)$ задать для каждого неразложимого счетного трансфинитного числа γ множество Ω_γ, σ-алгебру его подмножеств $\mathfrak{N}_\gamma$ и $\mathfrak{N}_\gamma$-измеримую функцию

$$\pi_\gamma(\omega, \Gamma) = P_x \{ x_\gamma^* \in \Gamma \mid \mathfrak{N}_\gamma \}. \quad (\omega \in \Omega_\gamma, \ \Gamma \in \mathfrak{B})$$

Заметим далее, что

а) если $\Omega_\beta, \mathfrak{N}_\beta, \pi_\beta(\omega, \Gamma)$ заданы для всех неразложимых $\beta < \gamma$, то этим определяются множество Ω_γ, σ-алгебра $\mathfrak{N}_\gamma$ и все меры P_x на этой σ-алгебре;

б) функция $\pi_\gamma(\omega, \Gamma)$ является случайной вероятностной мерой т. е.

$$\pi_\gamma(\omega, \mathcal{E}) \approx 1,$$

и если $\Gamma \in \mathfrak{B}$ есть сумма конечного или счетного числа попарно непересекающихся множеств $\Gamma_n \in \mathfrak{B}$, то

$$\pi_\gamma(\omega, \Gamma) \approx \Sigma \pi_\gamma(\omega, \Gamma_n).$$

---

* Нетрудно по каждому скачкообразному процессу построить процесс, удовлетворяющий всем перечисленным ниже требованиям и имеющий те же переходные вероятности, что и первоначальный.

Отсюда видно, что все скачкообразные процессы, соответствующие функциям $a(x)$ и $\Pi(x, \Gamma)$, можно построить посредством индуктивного процесса (индукция по неразложимым трансфинитным числам γ), причем на каждом шагу приходится выбирать только функцию $\pi_\gamma(\omega, \Gamma)$. Эта функция должна быть измерима относительно $\mathfrak{N}_\gamma$ и подчинена условию б). Можно показать, что никаких других ограничений для этого выбора не существует.

Поступила в редакцию
2.10.57.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Добрушин, Некоторые классы однородных счетных марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен., II, вып. 3 (1957), 377—380.
[2] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория вероятн. и ее примен., I, 1 (1956), 25—37.
[3] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен., I, 1 (1956), 38—60.
[4] Е. Б. Дынкин, Неоднородные строго марковские процессы, ДАН СССР, 113 : : 2 (1956), 261—264.
[5] В. М. Дубровский, Обобщение теории чисто разрывных случайных процессов W. Feller'a, ДАН СССР, 19 (1938), 439—444.
[6] В. М. Дубровский, Исследование чисто разрывных случайных процессов методом интегро-дифференциальных уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, (1944), 107—128.
[7] Е. Б. Дынкин и А. А. Юшкевич, Строго марковские процессы, Теория вероятн. и ее примен., I, 1 (1956), 149—155.
[8] А. А. Юшкевич, О строго марковских процессах, Теория вероятн. и ее прмен., II, 2 (1957), 187—213.
[9] D. Blackwell, On transient Markov processes with a countable number of states and stationary transition probabilities, Ann. of Math. Stat., 26, 4 (1955), 654—658.
[10] W. Doeblin, Sur certains mouvements aléatoires discontinus, Scand. Aktuarietidskrift, 1939, 211—222.
[11] J. L. Doob, Markoff chains — denumerable case, Trans. Amer. Math. Soc., 58, 3 (1945), 455—473.
[12] Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы, М., 1956. (J. L. Doob, Stochastic processes, New York—London, 1953).
[13] W. Feller, Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz- und Eindeutigkeitssätze), Math. Annalen, 113 (1936), 113—166.
[14] W. Feller, On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc., 48 (1940), 488—515.
[15] W. Feller, On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. of Math., 65, 3 (1957), 527—570.

MARKOV JUMP PROCESSES

E. B. DYNKIN (MOSCOW)

(Summary)

A Markov process $x(t, \omega)$ $(t \geqslant 0, \omega \in \Omega)$ on a measurable space $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ is called a jump process, if for every $\omega \in \Omega$ and $t \geqslant 0$ there exists an $\varepsilon > 0$ such that $x(t, \omega) = x(t + h, \omega)$ for all $h \in [0, \varepsilon)$. In this paper infinitesimal operators of all jump processes are calculated. The results of these calculations imply the classification processes described.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1958

ON A SOJOURN TIME PROBLEM

L. TAKÁCS

Introduction

Let us consider a stochastic process $\{\xi(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ whose random variables take on values in X, where X is an arbitrary abstract space. Let $X = A + B$, where A and B are fixed disjoint sets. A new stochastic process $\{\chi(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ is defined as follows:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi(t) \in B \\ 0 & \text{if} \quad \xi(t) \in A. \end{cases}$$

Suppose $\xi(0) \in A$. Then the process $\{\xi(t)\}$ assumes the states A, B, A, B, $A, \ldots$ alternatingly. Let us denote by $\xi_1, \eta_{11}, \xi_2, \eta_{12}, \xi_3, \ldots$ the times spent in states A and B, respectively. Suppose that $\xi_1, \eta_{11}, \xi_2, \eta_{12}, \xi_3, \ldots$ are non-negative independent random variables with the following distribution functions: $\mathbf{P}\{\xi_n < x\} = G(x)$ and $\mathbf{P}\{\eta_{1n} \leqslant x\} = H(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Thus, $G(x)$ is continuous on the left and $H(x)$ is continuous on the right.

Let us define

$$\beta(t) = \int_0^t \chi(u)\, du.$$

The random variable $\beta(t)$ yields the measure of the set consisting of those points u of the interval $(0, t)$ for which $\xi(u) \in B$. Let us put $\mathbf{P}\{\beta(t) \leqslant x\} = \Omega(t, x)$.

Below we shall deal with the determination of the asymptotic distribution of the random variable $\beta(t)$ as $t \to \infty$.

In paper [7] the exact distribution of $\beta(t)$ has been determined. Let us define $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and $\chi_n = \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, where $\eta_0 \equiv 0$; moreover, let $\mathbf{P}\{\zeta_n < x\} = G_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ and $\mathbf{P}\{\chi_n \leqslant x\} = H_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Here, $H_0(x) = 1$ if $x \geqslant 0$ and $H_0(x) = 0$ if $x < 0$. Put $G_0(x) \equiv 1$. Then, it holds that

$$\Omega(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,[G_n(t - x) - G_{n+1}(t - x)].$$

This formula was used in [7] and [8] to determine the asymptotic distribution of $\beta(t)$ for some cases. They are direct proofs. However, the

question arises whether the asymptotic distribution of $\beta(t)$ can be expressed as that of the sum of a random number of independent random variables. This can be done but, unfortunately, the number of the random variables depends on the random variables themselves. In some particular cases the asymptotic distribution of $\beta(t)$ can be determined this way using a theorem by F. J. Anscombe [1]. (It should be noted that A. Rényi [5] has proved Theorem 2. of paper [7] by a similar method). Here we shall show that the determination of the asymptotic distribution of $\beta(t)$ may be reduced in all cases to that of a sum of a random number of independent random variables, where the number of the variables is independent of the variables themselves. To obtain the asymptotic distributions, we can apply a theorem by R. L. Dobrushin [2]. (A special case of this theorem was proved earlier by H. Robbins [6]).

§ 1. Reduction of the problem to investigating the asymptotic distribution of a sum of independent random variables

First, the distribution function $\Omega(t, x)$ is determined. This proof is simpler than in [7]. Let us define $\alpha(t) = t - \beta(t)$, where $\alpha(t)$ is the measure of the set consisting of those points u of the interval $(0, t)$ for which $\xi(u) \in A$. Let us denote by τ the least instant for which $\alpha(\tau) = t - x$. Clearly, $\xi(\tau) \in A$. Thus, τ is a random variable defined uniquely. Next, the following identity is proved:

$$\{\beta(t) \leqslant x\} \equiv \{\beta(\tau) \leqslant x\},$$

where $0 \leqslant x \leqslant t$. As $\alpha(t) + \beta(t) = t$ for all $t\,(0 \leqslant t < \infty)$, and $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are monotone non-decreasing functions of t, it is easily obtained that $\{\beta(t) \leqslant x\} \equiv \{\alpha(\tau) \leqslant \alpha(t)\} \equiv \{\tau \leqslant t\} \equiv \{\alpha(\tau) + \beta(\tau) \leqslant t\} \equiv \{\beta(\tau) \leqslant x\}$. Hence,

$$\Omega(t, x) = \mathbf{P}\{\beta(t) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqslant x\}$$

if $0 \leqslant x \leqslant t$. The event $\{\beta(\tau) \leqslant x\}$ can occur in several mutually exclusive ways: the instant τ takes place on the 1st, 2nd, 3rd, ... "A — interval". If τ takes place on the $n+1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ "A — interval", then $\beta(\tau) = \chi_n$, and we have $\beta(\tau) = \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_\nu$, where ν is a random variable with integer values. Now $\{\nu < n\} \equiv \{\zeta_n \geqslant t - x\}$. Consequently, ν is uniquely determined by the random variables $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$, and thus ν is independent of the random variables $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$. Further, $\mathbf{P}\{\nu < n\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \geqslant t - x\}\,(n = 1, 2, \ldots)$, i. e. $\mathbf{P}\{\nu = n\} = G_n(t - x) - G_{n+1}(t - x)\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Then, by the total probability theorem we have

$$\mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqslant x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = n\} \cdot \mathbf{P}\{\chi_n \leqslant x\}$$

i. e.

$$\Omega(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(t - x) - G_{n+1}(t - x)]\, H_n(x),$$

if $0 \leqslant x \leqslant t$. The other cases are evident.

Remark. It is worth-while to mention two facts which are surprising on first sight. First, that the random variable $\beta(t)$ is a sum of certain B-intervals for which the last interval is eventually truncated. The distribution function of $\beta(t)$ does not contain, however, the distribution of such a truncated interval. Secondly, $\beta(t) \leqslant x$ and $\beta(\tau) \leqslant x$ have the same probability although in case $\beta(\tau) \leqslant x$ it always holds that $\beta(\tau) \leqslant \beta(t)$, and it may even be that $\beta(\tau) < \beta(t)$.

Now we proceed as follows. Let $\nu_y\ (0 \leqslant y < \infty)$ be a random variable which assumes only non-negative integer values, and for which $\{\nu_y < n\} \equiv \equiv \{\zeta_n \geqslant y\}$. Then,

$$\mathbf{P}\{\nu_y < n\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \geqslant y\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

i. e.

$$\mathbf{P}\{\nu_y = n\} = G_n(y) - G_{n+1}(y) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Consider the sum

$$\chi_{\nu_y} = \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_{\nu_y}.$$

Here, $\{\eta_m\}$ are independent random variables, which are independent also of ν_y. Let us put $\mathbf{P}\{\chi_{\nu_y} \leqslant x\} = \Psi(x, y)$. Then clearly

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,[G_n(y) - G_{n+1}(y)].$$

Thus, for $0 \leqslant x \leqslant t$ we have

$$\Omega(t, x) = \Psi(x, t - x) \tag{2}$$

and an investigation of the asymptotic behaviour of $\Omega(t, x)$ may be reduced to that of $\Psi(x, y)$. In this latter case we can apply Dobrushin's theorem.

We expect that $\beta(t)$ has an asymptotic distribution if, and only if, $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ and $\chi_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$ have asymptotic distributions as $n \to \infty$. For the existence of these asymptotic distributions a necessary and sufficient condition was given by W. Doeblin [3] (Cf. W. Feller [4]). Somewhat restricting Doeblin's conditions and omitting some extreme cases we shall suppose that the distribution functions $H(x)$ and $G(x)$ satisfy one of the following assumptions (h_1), (h_2), (h_3) and (g_1), (g_2), (g_3), respectively. In these cases there always exists a limiting distribution.

Put

$$\beta = \int_0^{\infty} x\,dH(x), \qquad \sigma_\beta^2 = \int_0^{\infty} (x - \beta)^2\,dH(x)$$

and

$$\alpha = \int_0^{\infty} x\,dG(x), \qquad \sigma_\alpha^2 = \int_0^{\infty} (x - \alpha)^2\,dG(x).$$

Further, denote by $F_j(x)\ (0 < j < 2,\ j \neq 1)$ the stable distribution function whose characteristic function is given by

$$\varphi_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\,dF_j(x) = \exp\left\{-|z|^j\left(\cos\frac{\pi j}{2} - i\sin\frac{\pi j}{2}\operatorname{sgn} z\right)\Gamma(1 - j)\right\}$$

and put

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

Assumptions for $H(x)$:

(h_1): $\sigma_\beta < \infty$. Then, the central limit theorem holds and we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n - n\beta}{\sigma_\beta n^{1/j_2}} \leqslant x\right\} = \Phi(x).$$

(h_2): $\lim\limits_{x\to\infty} [1 - H(x)]\, x^{j_2} = B$, where $1 < j_2 < 2$ and B is a positive constant. Then, by Doeblin's theorem we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n - n\beta}{(nB)^{1/j_2}} \leqslant x\right\} = F_{j_2}(x).$$

(h_3): $\lim\limits_{x\to\infty} [1 - H(x)]\, x^{j_2} = B$, where $0 < j_2 < 1$ and B is a positive constant. Then, by Doeblin's theorem we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n}{(nB)^{1/j_2}} \leqslant x\right\} = F_{j_2}(x).$$

Taking (2) into consideration, the determination of the asymptotic distribution of ν_y can be reduced to that of ζ_n as $n \to \infty$. Applying a method given by W. Feller [4] we obtain the following limiting distributions.

Assumptions for $G(x)$:

(g_1): $\sigma_\alpha < \infty$. Then, we have

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y - \frac{y}{\alpha}}{\left(\frac{\sigma_\alpha^2 y}{\alpha^3}\right)^{1/j_2}} \leqslant x\right\} = \Phi(x).$$

(g_2): $\lim\limits_{x\to\infty} [1 - G(x)]\, x^{j_1} = A$, where $1 < j_1 < 2$ and A is a positive constant. Then, we have

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y - \frac{y}{\alpha}}{\left(\frac{Ay}{\alpha^{1+j_1}}\right)^{\frac{1}{j_1}}} \leqslant x\right\} = 1 - F_{j_1}(-x).$$

(g_3): $\lim\limits_{x\to\infty} [1 - G(x)]\, x^{j_1} = A$, where $0 < j_1 < 1$ and A is a positive constant. Then, we have

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y A}{y^{j_1}} \leqslant x\right\} = 1 - F_{j_1}\left(x^{-\frac{1}{j_1}}\right).$$

If $H(x)$ satisfies one of the assumptions (h_1), (h_2), (h_3) and $G(x)$ satisfies one of the assumptions (g_1), (g_2), (g_3). Then, by applying Dobrushin's

theorem mentioned above we obtain that the following limiting distribution

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_{\nu_y} - My^{\lambda}}{Dy^{\mu}} \leqslant z\right\} = P(z)$$

exists with appropriate distribution $P(z)$ and constants M, D, λ, μ. Table I contains the possible limiting distributions corresponding to the different assumptions. In Table I ξ and η are independent random variables with distribution functions

$$\mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} = F_{j_1}(x) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}\{\eta \leqslant x\} = F_{j_2}(x).$$

Thus, we have shown that in the above cases the following holds true

$$\lim_{y\to\infty} \Psi(My^{\lambda} + zDy^{\mu},\ y) = P(z)$$

with an appropriate distribution $P(z)$ and appropriate constants M, D, λ, μ.

It should be noted that if y_t and z_t depend on a parameter t and $\lim_{t\to\infty} y_t = \infty$, $\lim_{t\to\infty} z_t = z$, then the following also holds

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(My_t^{\lambda} + z_t Dy_t^{\mu},\ y_t) = P(z) \tag{3}$$

because $P(z)$ is in all cases a continuous distribution function. By means of (3) we can easily prove the following theorems.

§ 2. Theorems concerning the asymptotic distributions of $\beta(t)$.

We shall determine the asymptotic distribution of $\beta(t)$ for different conditions. The corresponding theorems are given in Table II. In this table ξ and η are independent random variables with distribution functions $\mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} = F_{j_1}(x)$ and $\mathbf{P}\{\eta \leqslant x\} = F_{j_2}(x)$.

Proof of Theorems 1, 2, 4, 5, 6, 7. Put in (3)

$$y_t = \frac{\alpha t}{\alpha+\beta} - x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\mu} \quad \text{and} \quad z_t = \frac{\frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\mu} - \frac{\beta}{\alpha} y_t}{Dy_t^{\mu}}$$

with appropriate D and μ. Then, $\lim_{t\to\infty} y_t = \infty$ and

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z = \frac{x(\alpha+\beta)}{D\alpha^{1+\mu}}.$$

By (2) we have

$$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\mu}\right) = \Psi\left(\frac{\beta}{\alpha} y_t + z_t Dy_t^{\mu},\ y_t\right)$$

and by (3)

$$\lim_{t\to\infty} \Psi\left(\frac{\beta}{\alpha} y_t + z_t Dy_t^{\mu},\ y_t\right) = P(z) = P\left(\frac{x(\alpha+\beta)}{D\alpha^{1+\mu}}\right)$$

with the appropriate $P(z)$. Q. E. D.

Table I

	$H(x)$	$G(x)$	j	M	λ	D	μ	$P(z)$
1	h_1	g_1		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\Phi\left(\frac{\alpha^{\frac{3}{2}} z}{\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}}\right)$
2	h_1	g_2		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{1}{j_1}}$	$\frac{1}{j_1}$	$1-F_{j_1}(-z)$
3	h_1	g_3		0	—	$\frac{\beta}{A}$	j_1	$1-F_{j_1}\left(z^{-\frac{1}{j_1}}\right)$
4	h_2	g_1		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{j_2}}$	$\frac{1}{j_2}$	$F_{j_2}(z)$
5	h_2	g_2	$j_2>j_1$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{1}{j_1}}$	$\frac{1}{j_1}$	$1-F_{j_1}(-z)$
6	h_2	g_2	$j_i=j$ $(i=1,2)$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	1	$\frac{1}{j}$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha B^{\frac{1}{j}}\eta-\beta A^{\frac{1}{j}}\xi}{\alpha^{\frac{1+j}{j}}}\leqslant z\right\}$
7	h_2	g_2	$j_2<j_1$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{j_2}}$	$\frac{1}{j_2}$	$F_{j_2}(z)$
8	h_2	g_3		0	—	$\frac{\beta}{\alpha}$	j_1	$1-F_{j_1}\left(z^{-\frac{1}{j_1}}\right)$
9	h_3	g_1		0	—	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{j_2}}$	$\frac{1}{j_2}$	$F_{j_2}(z)$
10	h_3	g_2		0	—	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{j_2}}$	$\frac{1}{j_2}$	$F_{j_2}(z)$
11	h_3	g_3	$j_2>j_1$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{j_2}}$	$\frac{j_1}{j_2}$	$\mathbf{P}\{\eta\xi^{-\frac{j_1}{j_2}}\leqslant z\}$
12	h_3	g_3	$j_i=j$ $(i=1,2)$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{j}}$	1	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta}{\xi}\leqslant z\right\}$
13	h_3	g_3	$j_2<j_1$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{j_2}}$	$\frac{j_1}{j_2}$	$\mathbf{P}\{\eta\xi^{-\frac{j_1}{j_2}}\leqslant z\}$

Proof of Theorems 3, 8, 11, 12. Put in (3)

$$y_t = t - xt^{\mu}$$

and

$$z_t = \frac{xt^{\mu}}{Dy_t^{\mu}};$$

then, $\lim_{t\to\infty} y_t = \infty$ and

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z = \begin{cases} \frac{x}{D} & \text{if } \mu < 1 \\ \frac{x}{D(1-x)} & \text{if } \mu = 1. \end{cases}$$

Table II

	$H(x)$	$G(x)$	j	x	Ω_t	$\lim\limits_{t\to\infty}\Omega_t$
1	h_1	g_1		$(-\infty,\infty)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$	$\Phi\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}}\right)$
2	h_1	g_2		$(-\infty,\infty)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{j_1}}\right)$	$1-F_{j_1}\left(\frac{-(\alpha+\beta)x}{\beta A^{1/j_1}}\right)$
3	h_1	g_3		$(0,\infty)$	$\Omega\,(t,\ xt^{j_1})$	$1-F_{j_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{j_1}}\right)$
4	h_2	g_1		$(-\infty,\infty)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{1/j_2}\right)$	$F_{j_2}\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha B^{1/j_2}}\right)$
5	h_2	g_2	$j_2>j_1$	$(-\infty,\infty)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{1/j_2}\right)$	$1-F_{j_1}\left(\frac{-(\alpha+\beta)x}{\beta A^{1/j_1}}\right)$
6	h_2	g_2	$j_i=j$ $(i=1,2)$	$(-\infty,\infty)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{1/j}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha B^{1/j}\eta-\beta A^{1/j}\xi}{(\alpha+\beta)}\leqslant x\right\}$
7	h_2	g_2	$j_2<j_1$	$(-\infty,\infty)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{j_1}}\right)$	$F_{j_2}\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha B^{1/j_2}}\right)$
8	h_3	g_3		$(0,\infty)$	$\Omega\,(t,\ xt^{j_1})$	$1-F_{j_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{j_1}}\right)$
9	h_3	g_1		$(0,\infty)$	$\Omega\,(t,\ t-xt^{j_2})$	$F_{j_2}\left(\left(\frac{\alpha}{Bx}\right)^{1/j_2}\right)$
10	h_3	g_2		$(0,\infty)$	$\Omega\,(t,\ t-xt^{j_2})$	$F_{j_2}\left(\left(\frac{\alpha}{Bx}\right)^{1/j_2}\right)$
11	h_3	g_3	$j_2>j_1$	$(0,\infty)$	$\Omega\left(t, xt^{\frac{j_1}{j_2}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{j_2}}{\xi^{j_1}}\leqslant\frac{Ax^{j_2}}{B}\right\}$
12	h_3	g_3	$j_i=j$ $(i=1,2)$	$(0,1)$	$\Omega\,(t,\ xt)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta}{\xi}\leqslant\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{j}}\frac{x}{1-x}\right\}$
13	h_3	g_3	$j_2<j_1$	$(0,\infty)$	$\Omega\left(t, t-xt^{\frac{j_2}{j_1}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{j_2}}{\xi^{j_1}}\leqslant\frac{A}{Bx^{j_1}}\right\}$

By (2) we have

$$\Omega\,(t, xt^{\mu}) = \Psi(z_t D y_t^{\mu},\ y_t)$$

and by (3),

$$\lim_{t\to\infty}\Psi(z_t D y_t^{\mu},\ y_t) = P\,(z) = \begin{cases} P\left(\frac{x}{D}\right) & \text{if } \mu<1 \\ P\left(\frac{x}{D\,(1-x)}\right) & \text{if } \mu=1, \end{cases}$$

which was to be proved.

Proof of Theorems 9, 10, 13. Put in (3)

$$y_t = xt^{1/\mu}$$

and

$$z_t = \frac{t - y_t}{Dy_t^{\mu}};$$

then, $\lim_{t\to\infty} y_t = \infty$ and

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z = \frac{1}{Dx^{\mu}}.$$

By (2) we have

$$\Omega\left(t,\ t - xt^{\frac{1}{\mu}}\right) = \Psi(z_t Dy_t^{\mu},\ y_t)$$

and by (3)

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(z_t Dy_t^{\mu},\ y_t) = P(z)\, P = P\left(\frac{1}{Dx^{\mu}}\right)$$

which was to be proved.

Remark. In particular let us suppose that $\lim_{x\to\infty} [1 - G(x)]\, x^{\frac{1}{2}} = A$ and $\lim_{x\to\infty} [1 - H(x)]\, x^{\frac{1}{2}} = B$ with positive constants A and B. Then,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\beta(t) \leqslant tx\} = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{A^2 x}{A^2 x + B^2 (1 - x)}} & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \quad \text{if} \quad x < 1 \end{cases}$$

This follows from Theorem 12, being

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 2\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\right)\right] & \text{if } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest

Поступила в редакцию 30. 5. 57

REFERENCES

[1] F. J. Anscombe, Large-sample theory of sequential estimation, Proc. Cambridge Phil. Soc., 48 (1952), 600—607.

[2] Р. Л. Добрушин, Лемма о пределе сложной случайной функции, Успехи матем. наук, **10**, 4 (1955), 157—159.

[3] W. Doeblin, Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, Studia Math., 9 (1941), 71—96.

[4] W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., 67, (1949), 98—119.

[5] A. Rényi, On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 8 (1957) to appear.

[6] H. Robbins, The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), 1151—1161.

[7] L. Takács, On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 8 (1957) 169 — 191.

[8] L. Takács, On limiting distributions concerning a sojourn time problem, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 8 (1957) (to appear).

ЗАДАЧА О ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ

Л. ТАКАЧ (БУДАПЕШТ)

(*Резюме*)

Пусть $\{\xi(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ — вероятностный процесс такой, что величины $\xi(t)$ принимают два значения 0 и 1. Пусть $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$ — промежутки времени, проводимые последовательно в состояниях 0 и 1. Предположим, что $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \ldots$ — независимые, случайные величины с функциями распределения $\mathbf{P}\{\xi_n < x\} = G(x)$ и $\mathbf{P}\{\eta_n \leqslant x\} = H(x)$. Пусть

$$\beta(t) = \int_0^t \xi(u)du$$

задает время, проведенное системой в состоянии 1. В работе изучается асимптотическое распределение случайной величины $\beta(t)$ при $t \to \infty$, при различных предположениях об асимптотическом поведении сумм $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ и $\chi_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$ при $n \to \infty$. При этом существенно используется особый прием, позволяющий сводить изучение величины $\beta(t)$ к изучению суммы случайного числа независимых случайных величин.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1958

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

К. В. МАСЛОВ и *А. Я. ПОВЗНЕР*

Основной задачей настоящей работы является выяснение общего вида инфинитезимальных операторов одного класса марковских процессов в n-мерном пространстве. В работе показано, что при некоторых довольно общих условиях, налагаемых на переходные вероятности процесса, инфинитезимальный оператор для него является естественным обобщением на n-мерный случай оператора, рассмотренного в одномерном случае в работе К. Ито [3]. При этом мы отказались от требования К. Ито «стохастической дифференцируемости» процесса, заменив его, как нам кажется, более просто проверяемыми условиями, налагаемыми непосредственно на переходные вероятности. Подобный подход дает, в частности, возможность получать критерии того, что процесс принадлежит к тому или иному специальному виду.

Поскольку все результаты настоящей работы сформулированы в терминах переходных вероятностей, то нами полностью оставлен в стороне вопрос о связи полученных результатов с важными исследованиями Е. Б. Дынкина [4], в которых исходным пунктом являются свойства траекторий процесса. Мы надеемся вернуться к этому вопросу в другой работе.

Отметим, что требования, налагаемые нами на переходные вероятности, по-видимому, могут быть значительно ослаблены.

После того как настоящая статья была уже написана, в печати появилась работа А. В. Мартынова [7], содержащая ряд результатов, сходных с полученными в настоящей статье. Методы работы [7], по-видимому, не совпадают с нашими.

Так как при нашем подходе к задаче случай n-мерного процесса ($n > 1$) не вносит существенных осложнений по сравнению с процессом одномерным, то в основной части работы мы ограничимся исследованием одномерного процесса, а затем лишь укажем на те изменения, которые нужно внести в многомерном случае.

* * *

Рассмотрим одномерный марковский процесс, с переходными вероятностями $F(t, x; \tau, y)$. Функция $F(t, x; \tau, y)$ является неубывающей функцией y, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{y\to+\infty} F(t, x; \tau, y) = 1; \tag{1}$$

$$\lim_{y\to-\infty} F(t, x; \tau, y) = 0. \tag{2}$$

Как функция от x она измерима по мере, порождаемой ею как функцией y. Функция $F(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет, наконец, уравнению Колмогорова — Чепмена:

$$F(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t', z; \tau, y)\, d_z F(t, x; t', z). \tag{3}$$

$$(0 < t < t' < \tau)$$

Пусть C — пространство всех непрерывных и ограниченных на всей оси функций с нормой $\|f(x)\| = \sup_x |f(x)|$, а $\widetilde{C}$ — множество финитных функций из C; положим для $f(x) \in C$

$$\psi(t, x; \tau) = T_t^\tau f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y F(t, x; \tau, y). \tag{4}$$

Обозначим Ω совокупность функций из C, на которых имеет место разложение

$$T_{t'-\delta}^{t'} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y F(t' - \delta, x; t', y) = f(x) + \delta K_f(t', x) + o(\delta) \tag{5}$$

при любых фиксированных t' и x и $\delta > 0$.

Мы будем в дальнейшем рассматривать процессы, удовлетворяющие следующим условиям:

(A) для любой $f(x) \in C$ при фиксированных t' и x $T_{t'-\delta}^{t'} f$ стремится к $f(x)$ при $\delta \to 0$;

(B) множество Ω содержит подмножество Ω' дважды непрерывно дифференцируемых на всей оси функций таких, что, если $f(x) \in \Omega'$, то и $f(x - a) \in \Omega'$ при любом a; множество Ω' всюду плотно в $\widetilde{C}$ и, если $f(x) \in \widetilde{C}$ и имеет в конечном промежутке две непрерывные производные, то аппроксимирующие f функции из Ω' можно выбрать так, чтобы в указанном промежутке они равномерно приближали первую и вторую производные функции $f(x)$. *;

(C) при $N \to +\infty$ равномерно по δ

$$\int_{|y-x|>N} d_y \frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', y) \to 0.$$

Так как в силу (1) и (2) при произвольной константе c $T_{t'-\delta}^{t'}(f + c) = T_{t'-\delta}^{t'} f + c$, то, не ограничивая общности, можно считать, что Ω' всюду плотно не только в $\widetilde{C}$, но и в классе функций, обращающихся в константу вне некоторого нефиксированного интервала.

---

* Классом Ω' может служить, например, класс всех достаточно гладких финитных функций.

Теорема 1. *Пусть имеется одномерный марковский процесс, удовлетворяющий условиям* (A), (B) *и* (C). *Тогда, если функция* $\psi(t, x; \tau)$, *связанная с* $F(t, x; \tau, y)$ *посредством* (4), *дважды непрерывно дифференцируема по* x, *то она удовлетворяет уравнению*

$$-\frac{\partial \psi(t, x; \tau)}{\partial t_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \psi(t, y+x; \tau) - \psi(t, x; \tau) - \frac{y}{1+y^2} \frac{\partial \psi(t, x; \tau)}{\partial x} \right\} \times$$

$$\times \frac{1+y^2}{y^2} d_y \sigma(t, x, y) + \gamma(t, x) \frac{\partial \psi(t, x; \tau)}{\partial x} \tag{6}$$

и начальному условию

$$\psi(t, x; \tau) \to f(x) \quad \text{при } t \to \tau - 0, \tag{7}$$

где $\sigma(t, x, y)$ — *неубывающая функция, с ограниченной на всей оси вариацией при фиксированных* t *и* x.

Доказательство. Выясним сначала вид оператора K_f в разложении (5). Для этого докажем следующую лемму.

Лемма. *При любых фиксированных* $\alpha_1 > 0$ *и* $\alpha_2 > 0$ *имеют место неравенства*

$$\int_{|y-x| \geqslant \alpha_1} d_y \frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', y) \leqslant C_1; \tag{8}$$

$$\int_{|y-x| \leqslant \alpha_2} (y-x)^2 d_y \frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', y) \leqslant C_2, \tag{9}$$

где константы C_1 *и* C_2 *могут зависеть только от* x *и* t'.

Доказательство. Возьмем функцию

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1, & |y-x| \geqslant \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} \cdot (y-x)^2, & |y-x| \leqslant \alpha, \ (\alpha > 0) \end{cases}$$

и функцию $\varphi_1(y) \in \Omega'$, которая отличается достаточно мало от $\varphi(y)$, и такую, что в интервале $|y-x| < \alpha$ первая и вторая производные $\varphi_1(y)$ мало отличаются от производных функции $\varphi(y)$. Очевидно, что $\varphi_1(y)$ имеет абсолютный минимум вблизи точки x, скажем в точке $x+\beta$. Положим $\varphi_2(y) = \varphi_1(y+\beta)$. Тогда $\varphi_2(y)$ также мало отличается от $\varphi(y)$ и имеет абсолютный минимум в точке x. Так как $\varphi_2(y) \in \Omega'$ и $\varphi_2(y) - \varphi_2(x) \geqslant 0$, то из (5), учитывая (1) и (2), следует для $\alpha_1 > \alpha$ и $\alpha_2 < \alpha$

$$\int_{|y-x| \geqslant \alpha_1} \{\varphi_2(y) - \varphi_2(x)\} d_y \frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', y) +$$

$$+ \int_{|y-x| \leqslant \alpha_2} \{\varphi_2(y) - \varphi_2(x)\} d_y F(t' - \delta, x; t', y) \leqslant K_{\varphi_2} + o(1).$$

Если $\varphi_2(y)$ достаточно хорошо аппроксимирует функцию $\varphi(y)$ в указанном выше смысле, то $\varphi_2(y) - \varphi_2(x) \geqslant \frac{1}{2}$ в интервале $|y-x| \geqslant \alpha_1$ и

$$\varphi_2(y)-\varphi_2(x)=\frac{(y-x)^2}{2}\varphi_2''(x+\theta(y-x))\geqslant\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}$$
$$(0<\theta<1)$$

в интервале $|y-x|\leqslant\alpha_2$, откуда следует утверждение леммы.

Следствие. При любых фиксированных x и t', пользуясь первой теоремой Хэлли, можно выделить последовательность $\delta_n\to 0$ такую, что

а) последовательность функций $\left\{\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', y)\right\}$ в интервале $(-\infty, x-\alpha]$, где α — произвольное положительное число, сходится в основном к некоторой неубывающей функции $\sigma_1(t', x, y)$, а последовательность $\left\{\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', y)-\frac{1}{\delta_n}\right\}$ сходится в основном в интервале $[x+\alpha, \infty)$ к неубывающей функции $\sigma_2(t', x, y)$; при этом из условия (C) следует, что

$$\lim_{y\to-\infty}\sigma_1(t', x, y)=0 \qquad \lim_{y\to+\infty}\sigma_2(t', x, y)=0.$$

б) последовательность функций $\left\{\int\limits_{x-\alpha}^{y}(z-x)^2 d_z\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', z)\right\}$ в интервале $[x-\alpha, x+\alpha]$ сходится в основном к некоторой неубывающей функции $\sigma_3(t', x, y)$.

По второй теореме Хэлли имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}f(y)\,d_y\int\limits_{x-\alpha}^{y}(z-x)^2\,d_z\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', z)=$$
$$=\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}f(y)\,d_y\sigma_3(t', x, y), \tag{10}$$

если $f(y)$ непрерывная в интервале $[x-\alpha, x+\alpha]$ функция. Из условия (C) и из второй обобщенной теоремы Хэлли (см. [2]) вытекает, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x-\alpha}f_1(y)\,d_y\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', y)=\int\limits_{-\infty}^{x-\alpha}f_1(y)\,d_y\sigma(t', x, y); \tag{11}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{x+\alpha}^{+\infty}f_2(y)\,d_y\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', y)=\int\limits_{x+\alpha}^{+\infty}f_2(y)\,d_y\sigma_2(t', x, y), \tag{12}$$

если $f_1(y)$ и $f_2(y)$ непрерывные и ограниченные функции в интервалах $(-\infty, x-\alpha]$ и $[x+\alpha, \infty)$ соответственно.

Пусть теперь $f(x)\in\Omega'$. Тогда из (5) следует, если взять α так, чтобы точки $x-\alpha$ и $x+\alpha$ были точками непрерывности для всех функций $\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', y)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{x-\alpha}\{f(y)-f(x)\}\,d_y\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', y)+$$
$$+\int\limits_{x+\alpha}^{+\infty}\{f(y)-f(x)\}\,d_y\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n, x; t', y)+$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\{f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\}\frac{1}{(y-x)^2}d_y\int_{x-\alpha}^{y}(z-x)^2\,d_z\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n,x;t',z)+$$

$$+f'(x)\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(y-x)\,d_y\frac{1}{\delta_n}F(t'-\delta_n,x,t',y)=K_f+o(1). \qquad (13)$$

Учитывая (10), (11) и (12) и положив

$$\{f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\}\frac{1}{(y-x)^2}\Big|_{y=x}=\frac{1}{2}f''(x),$$

мы видим, что при $n\to\infty$ в левой части (13) пределы первых трех слагаемых существуют, а в силу существования предела в правой части, существует предел и четвертого слагаемого левой части. Мы обозначим

$$\gamma_1(t',x)=\lim_{n\to+\infty}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(y-x)\,d_yF(t'-\delta_n,x;t',y). \qquad (14)$$

Итак, получаем окончательно

$$K_f=\int_{-\infty}^{x-\alpha}\{f(y)-f(x)\}\,d_y\sigma_1(t',x,y)+\int_{x+\alpha}^{+\infty}\{f(y)-f(x)\}\,d_y\sigma_2(t',x,y)+$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\{f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\}\frac{1}{(y-x)^2}\,d_y\sigma_3(t',x,y)+\gamma_1(t',x)f'(x). \qquad (15)$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Замечание. Для всякой ограниченной и дважды непрерывно дифференцируемой функции существует предел

$$\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\{f(y)-f(x)\}\,d_y\frac{1}{\delta}F(t'-\delta,x;t',y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{x-\alpha}\{f(y)-f(x)\}\,d_y\sigma_1(t',x,y)+\int_{x+\alpha}^{+\infty}\{f(y)-f(x)\}\,d_y\sigma_2(t',x,y)+$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\{f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\}\frac{1}{(y-x)^2}\,d_y\sigma_3(t',x,y)+\gamma_1(t',x)f'(x). \qquad (16)$$

Для функций $f(x)\in\Omega'$ это следует из того, что предел левой части (16) в силу (5) равен K_f. Если теперь в (13) заменить δ_n на δ и взять функцию $f(y)\in\Omega'$ с $f'(x)\neq0$, то из неравенств (8) и (9) мы получим

$$\Big|\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(y-x)\,d_y\frac{1}{\delta}F(t'-\delta,x;t',y)\Big|<C_3.$$

Из этого неравенства, из неравенств (8) и (9) и из свойств Ω' следует справедливость нашего утверждения в общем случае.

Сделанное замечание, очевидно, эквивалентно тому факту, что при $\delta\to0$ функции $\left\{\frac{1}{\delta}F(t'-\delta,x;t',y)\right\}$ сходятся в основном в интервале

$(-\infty, x-\alpha]$ к функции $\sigma_1(t', x, y)$. Аналогичное утверждение верно для интервалов $[x-\alpha, x+\alpha]$ и $[x+\alpha, \infty)$ и соответствующих совокупностей функций.

Мы теперь закончим доказательство теоремы, предварительно придав несколько иной вид оператору K_f.

Положим

$$\sigma_4(t', x, y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{(z-x)^2}{1+(z-x)^2}\, d_z\sigma_1(t', x, z);$$

$$\sigma_5(t', x, y) = \int_{x-\alpha}^{y} \frac{1}{1+(z-x)^2}\, d_z\sigma_3(t', x, z) + \sigma_4(t', x, x-\alpha);$$

$$\sigma_6(t', x, y) = \int_{x+\alpha}^{y} \frac{(z-x)^2}{1+(z-x)^2}\, d_z\sigma_2(t', x, z) + \sigma_5(t', x, x+\alpha);$$

$$\gamma(t', x) = \gamma_1(t', x) - \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{(y-x)^3}{1+(y-x)^2}\, d_y\sigma_3(t', x, y) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x-\alpha} \frac{y-x}{1+(y-x)^2}\, d_y\sigma_1(t', x, y) + \int_{x+\alpha}^{+\infty} \frac{y-x}{1+(y-x)^2}\, d_y\sigma_2(t', x, y).$$

Если обозначить теперь

$$\sigma(t', x, y) = \begin{cases} \sigma_4(t', x, x+y) & -\infty < y < -\alpha \\ \sigma_3(t', x, x+y) & -\alpha < y < \alpha \\ \sigma_5(t', x, x+y) & \alpha < y < +\infty, \end{cases}$$

то мы будем иметь

$$K_f(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ f(x+y) - f(x) - \frac{y}{1+y^2} f'(x) \right\} \frac{1+y^2}{y^2}\, d_y\sigma(t, x, y) +$$

$$+ \gamma(t, x) f'(x). \tag{17}$$

Уравнение (3) дает нам:

$$\psi(t'-\delta, x; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t', z; \tau)\, d_z F(t'-\delta, x; t', z). \tag{18}$$

Если функция $\psi(t', x, \tau)$ — дважды непрерывно дифференцируема, то из (18) следует

$$\frac{\psi(t'-\delta, x; \tau) - \psi(t', x; \tau)}{\delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\psi(t', z; \tau) - \psi(t', x; \tau)\}\, d_z \frac{1}{\delta} F(t'-\delta, x; t', z), \tag{19}$$

а из сделанного выше замечания вытекает, что предел в правой части (19) существует и равен K_ψ. Отсюда следует существование предела в левой части и выполнение уравнения (6). Выполнение начального условия (7) является следствием условия (A). Это и заканчивает доказательство теоремы.

* * *

Укажем теперь на некоторые следствия из доказанного.

а) *Инфинитезимальный оператор однородного процесса с независящими приращениями и непрерывного по t в смысле выполнения условия* (А).

Пусть $P(t, x)$ — функция переходных вероятностей такого процесса и $T_t f = T_{t'}^{\tau} f$, где $t = \tau - t'$. Если $\varphi(t, \lambda)$ — характеристическая функция для $P(t, x)$, то, как легко видеть, из полугруппового свойства семейства операторов T_t и непрерывности процесса в указанном смысле вытекает, что $\varphi(t, \lambda) = e^{\alpha(\lambda) t}$, где $\operatorname{Re}\{\alpha(\lambda)\} \leqslant 0$. Пусть $f(x) \in C$ имеет три непрерывных производных на всей оси. Имеем:

$$T_t f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} F(\lambda)\, e^{\alpha(\lambda) t}\, d\lambda,$$

где

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx.$$

Положим $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} T_t f dt$ (интеграл существует, поскольку $T_t f$ является непрерывной функцией при каждом фиксированном x). Ясно, что $f_\varepsilon(x)$ является трижды дифференцируемой функцией. Так как $f(x)$ имеет три непрерывных производных, то $F(\lambda)$ убывает на бесконечности не медленнее λ^{-3} и

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \cdot F(\lambda) \frac{e^{\alpha(\lambda)\varepsilon} - 1}{\varepsilon \cdot \alpha(\lambda)}\, d\lambda, \tag{20}$$

а так как $\left| \frac{e^{\alpha(\lambda)\varepsilon} - 1}{\varepsilon \alpha(\lambda)} \right| < C$ при всех λ и ε, то

$$\begin{aligned} f_\varepsilon'(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\lambda)\, e^{-i\lambda x} F(\lambda) \frac{e^{\alpha(\lambda)\varepsilon} - 1}{\varepsilon \alpha(\lambda)}\, d\lambda; \\ f_\varepsilon''(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda^2)\, e^{-i\lambda x} F(\lambda) \frac{e^{\alpha(\lambda)\varepsilon} - 1}{\varepsilon \alpha(\lambda)}\, d\lambda. \end{aligned} \tag{21}$$

В конечном интервале изменения λ, функция $\alpha(\lambda)$ ограничена, поэтому

$$f_\varepsilon(x) \to f(x), \quad f_\varepsilon'(x) \to f'(x) \quad \text{и} \quad f_\varepsilon''(x) \to f''(x)$$

равномерно по x.

Следовательно, функциями $f_\varepsilon(x)$ можно аппроксимировать функцию $f(x)$ вместе с ее двумя производными с любой степенью точности. С другой стороны, на функциях $f_\varepsilon(x)$ разложение (5) наверное имеет место. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{T_\delta f_\varepsilon - f_\varepsilon}{\delta} &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} T_{t+\delta} f dt - f_\varepsilon \right) = \frac{1}{\varepsilon\delta}\left(\int_\delta^{\delta+\varepsilon} T_t f dt - \int_0^{\varepsilon} T_t f dt \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon\delta}\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} T_t f dt - \int_0^{\delta} T_t f dt \right) \end{aligned}$$

и выражение, стоящее в скобках, деленное на δ, имеет предел при $\delta \to 0$. Таким образом, условие (B) выполняется. Выполнение условия (C) следует известным способом (см. [1]). Мы имеем при всех λ внутри конечного интервала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\, d_x \frac{P(t, x)}{t} \to \alpha(\lambda) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Поэтому, полагая $\beta(\lambda) = -\operatorname{Re}\{\alpha(\lambda)\}$, будем иметь для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом t

$$\beta(\lambda) + \varepsilon \geqslant \int_{|x| \geqslant N} (1 - \cos \lambda x)\, d_x \frac{P(t, x)}{t}.$$

Усредняя это неравенство по значениям $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{N}$, получим:

$$\frac{N}{2} \int_0^{\frac{2}{N}} \beta(\lambda)\, d\lambda + \varepsilon \geqslant \int_{|x| \geqslant N} \left(1 - \frac{N \sin \frac{2x}{N}}{2x}\right) d_x \frac{P(t, x)}{t}.$$

Так как при $|x| \geqslant N$

$$1 - \frac{N \sin \frac{2x}{N}}{2x} \geqslant \frac{1}{2}$$

и при достаточно большом N

$$\left| \frac{N}{2} \int_0^{\frac{2}{N}} \beta(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \max_{0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{N}} \{\beta(\lambda)\} < \varepsilon,$$

то

$$\int_{|x| \geqslant N} d_x \frac{1}{t} P(t, x) \leqslant 4\varepsilon.$$

Таким образом, условия теоремы выполняются, и, если обозначить инфинитезимальный оператор процесса через A, то

$$Af = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ f(x + y) - f(x) - \frac{y}{1 + y^2} f'(x) \right\} \frac{y^2}{1 + y^2}\, d\sigma(y) + \gamma f'(x), \qquad (22)$$

где $\sigma(y)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на всей оси.

б) *Условие локальности оператора K_f.*

Для того, чтобы оператор K_f был локальным оператором, функция $\sigma(t, x, y)$ должна (как функция y) иметь скачок в нуле и быть постоянной в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Для этого необходимо и достаточно, как это следует из замечания на стр. 74, чтобы

$$\int_{|y - x| \geqslant \varepsilon} d_y \frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', y) \to 0 \qquad (23)$$

при каждом фиксированном ε.

Таким образом, для того, чтобы уравнение (6) было уравнением Колмогорова необходимо и достаточно выполнения условия (23)*.

в) *Чисто разрывный процесс.*

Для того, чтобы процесс представлял собой чисто разрывный процесс Феллера (см. [2]), функция $\sigma(t, x, y)$ должна подчиняться условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+y^2}{y^2} d_y \sigma(t, x, y) < \infty. \tag{24}$$

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} d_y \frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', y) < C \quad (\alpha > 0) \tag{25}$$

при фиксированных t' и x и всех δ.

В частности, для того чтобы процесс был пуассоновским с параметром λ необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', 1 - \varepsilon) \to 0, \\ &\frac{1}{\delta} F(t' - \delta, x; t', 1 + \varepsilon) - \frac{1}{\delta} \to \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \tag{26}$$

при каждом фиксированном ε.

* *
*

Отметим в заключение, что все полученные результаты могли бы быть сформулированы без понятия марковского процесса в терминах теории операторных уравнений.

Действительно, поставим следующую задачу. Рассмотрим уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x[u], \tag{27}$$

где L — некоторый линейный оператор.

На оператор L наложим следующие требования:

1) существует единственное в классе C решение задачи Коши для уравнения (27) при начальной функции $f(x) \in C$, заданной в момент времени $t = \tau$;

2) положительной начальной функции отвечает положительное решение, задающееся формулой:

$$u(t, x; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) d_y P(t, x; \tau, y),$$

где $P(t, x; \tau, y)$ — неубывающая функция с ограниченной на всей оси вариацией.

---

* Для данного класса процессов этот результат является известным фактом, исследованным Феллером в [5] и [6] в более общем виде другим методом.

Задача состоит в определении вида оператора L, удовлетворяющего этим требованиям. В таком случае из теоремы единственности следует, что функции $P(t, x; \tau, y)$ удовлетворяют уравнению Колмогорова — Чепмена. Если теперь потребовать, чтобы функции $P(t, x; \tau, y)$ удовлетворяли наложенным выше условиям и не требовать, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_y P(t, x; \tau, y) = 1, \tag{28}$$

то все результаты, которые мы получили, сохраняются и мы получим ответ на поставленный вопрос с тем отличием, что отсутствие условия нормировки (28) повлечет добавление в правой части (17) члена $\beta(t, x) f(x)$.

* * *

Теперь мы укажем, какие изменения нужно внести при исследовании многомерного случая. Мы это сделаем в целях простоты изложения на примере двух измерений и будем пользоваться, естественно, не функциями распределения, а мерами на плоскости.

Итак, пусть $P(t, p; \tau, \Gamma)$ — переходная вероятность двумерного марковского процесса, p — точка плоскости, с координатами (x_1, x_2), Γ—борелевское множество этой плоскости, на котором определена вероятностная мера $P(t, p; \tau, \Gamma)$. Условия, которые мы налагаем на процесс те же, что и в одномерном случае, и мы их не будем повторять. Сохраняя для двумерного случая обозначения, которые мы приняли в случае одномерном, имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Для марковского процесса, удовлетворяющего поставленным выше требованиям, функция $\psi(t, p, \tau)$ в том случае, когда она дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению*

$$-\frac{\partial \psi(t, x_1, x_2; \tau)}{\partial t} = a_{11}(t, x_1, x_2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2a_{12}(t; x_1, x_2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} +$$

$$+ a_{22}(t, x_1, x_2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{R_2 - D_\varepsilon} \Bigg\{ \psi(t, y_1 + x_1, y_2 + x_2; \tau) -$$

$$- \psi(t, x_1, x_2; \tau) - \frac{y_1}{1 + y_1^2 + y_2^2}\frac{\partial \psi(t, x_1, x_2; \tau)}{\partial x_1} -$$

$$- \frac{y_2}{1 + y_1^2 + y_2^2}\frac{\partial \psi(t, x_1, x_2; \tau)}{\partial x_2}\Bigg\}\frac{1 + y_1^2 + y_2^2}{y_1^2 + y_2^2}\mu(t, x_1, x_2, dq) +$$

$$+ \gamma_1(t, x_1, x_2)\frac{\partial \psi(t, x_1, x_2; \tau)}{\partial x_1} + \gamma_2(t, x_1, x_2)\frac{\partial \psi(t, x_1, x_2; \tau)}{\partial x_2} \tag{6'}$$

и начальному условию

$$\psi(t', p; \tau) \to f(p) \text{ при } t' \to \tau - 0, \tag{7'}$$

где R_2 — все двумерное пространство, D_ε — некоторая окрестность начала координат с диаметром ε, q — точка с координатами (y_1, y_2), наконец, $\mu(t, p, \Gamma)$ — мера на плоскости такая, что $\mu(t, p, R_2) < \infty$ для каждых фиксированных p и t. Кроме того, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \leqslant 0$ при любых значениях p и t.

Доказательство. Поскольку теоремы Хэлли остаются верными для многомерного случая (см., например, [8]), то ход доказательств в целом не изменяется по сравнению с доказательством теоремы 1. Некоторые изменения приходится внести лишь при выяснении вида оператора K_f.

Аналогично тому, как мы это делали раньше, выделим квадрат Q_h с центром в точке p и сторонами длины h параллельными осям координат. Как и прежде, покажем, что меры $\frac{1}{\delta} P(t'-\delta, p; t', \Gamma)$ вне квадрата Q_h слабо сходятся к мере $\mu_1(t', p, \Gamma)$.

Возьмем теперь точку q внутри Q_h и рассмотрим прямоугольник Π_q, противоположными вершинами которого являются точки q и $\left(x_1 - \frac{h}{2}, x_2 - \frac{h}{2}\right)$, и пусть

$$\Phi_\delta(t', p, q) = \iint\limits_{\Pi_q} \{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2\} \frac{1}{\delta} P(t'-\delta, p; t', dr),$$

где r имеет координаты (z_1, z_2). Из функций $\Phi_\delta(t', p, q)$ можно выделить последовательность, сходящуюся в основном к функции $\Phi(t', p, q)$, которая порождает в квадрате Q_h меру $\mu_2(t', p, \Gamma)$. Однако в отличие от одномерного случая нельзя прямо выполнить предельный переход в интеграле

$$\iint\limits_{Q_h}\left\{ f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - (y_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} - (y_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\} \frac{1}{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} d\Phi_{\delta_k},$$

так как подинтегральная функция, вообще говоря, не имеет предела при $y_1 \to x_1$ и $y_2 \to x_2$.

Обозначим Q_ε квадрат с центром в точке p и со стороной ε. При этом ε выберем так, чтобы на границе квадрата Q_ε все функции Φ_{δ_k} были непрерывны. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_h}\left\{ f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - (y_1 - x_1)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \right.\\
&\left. - (y_2 - x_2)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right\} \frac{1}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} d\Phi_{\delta_k} =\\
&= \iint\limits_{Q_h - Q_\varepsilon}\left\{ f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - (y_1 - x_1)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \right.\\
&\left. - (y_2 - x_2)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right\} \frac{1}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} d\Phi_{\delta_k} +\\
&+ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \iint\limits_{Q_\varepsilon} (y_1 - x_1)^2 \frac{1}{\delta_k} P(t'-\delta_k, p; t', dq) +\\
&+ 2\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \iint\limits_{Q_\varepsilon} (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)^2 \frac{1}{\delta_k} P(t'-\delta_k, p; t', dq) +\\
&+ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \iint\limits_{Q_\varepsilon} (y_2 - x_2)^2 \frac{1}{\delta_k} P(t'-\delta_k, p; t', dq) +\\
&+ \iint\limits_{Q_\varepsilon} \chi(y_1 - x_1, y_2 - x_2)\, d\Phi_{\delta_k}
\end{aligned} \tag{29}$$

Функция $\chi(u, v)$ при $u \to 0$ и $v \to 0$ стремится к нулю.

Обозначим

$$\iint\limits_{Q_\rho} (y_1 - x_1)^2 \frac{1}{\delta_k} P(t' - \delta_k, p; t', dq) = \lambda_{11}^{(k)}(t', p, \rho);$$

$$\iint\limits_{Q_\rho} (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \frac{1}{\delta_k} P(t' - \delta_k, p; t', dq) = \lambda_{12}^{(k)}(t', p, \rho);$$

$$\iint\limits_{Q_\rho} (y_2 - x_2)^2 \frac{1}{\delta_k} P(t' - \delta_k, p; t'; dq) = \lambda_{22}^{(k)}(t', p, \rho).$$

Функции $\lambda_{11}^{(k)}(t', p, \rho)$ и $\lambda_{22}^{(k)}(t', p, \rho)$ являются неубывающими функциями ρ, а функции $\lambda_{12}^{(k)}(t', p, \rho)$ — функции ограниченной вариации. Возьмем функцию из $\widetilde{C}$, которая в квадрате Q_h равна y_1^2. Выбирая близкую к ней функцию из Ω', получим:

$$\iint\limits_{Q_h} y_1^2 \frac{1}{\delta_k} P(t' - \delta_k, p; t', dq) \leqslant C.$$

Таким образом, вариации функций $\lambda_{21}^{(k)}$ равномерно по k ограничены в интервале $0 \leqslant \rho \leqslant h$. Аналогично получаем равномерную ограниченность вариаций для $\lambda_{22}^{(k)}$, после чего следует, что и функции $\lambda_{12}^{(k)}$ имеют ограниченную в совокупности вариацию. Выделяя соответствующим образом последовательности (нумерацию мы оставляем прежней) и строя предельные функции $\lambda_{11}(t', p, \rho)$, $\lambda_{12}(t', p, \rho)$ и $\lambda_{22}(t', p, \rho)$, получим:

$$\lim_{k \to +\infty} \left\{ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \iint\limits_{Q_\varepsilon} (y_1 - x_1)^2 \frac{1}{\delta_k} P(t' - \delta_k, p; t', dq) + \right.$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \iint\limits_{Q_\varepsilon} (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \frac{1}{\delta_k} P(t' - \delta_k, p; t', dq) +$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \iint\limits_{Q_\varepsilon} (y_2 - x_2)^2 \frac{1}{\delta_k} P(t' - \delta_k, p; t', dq) \right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \lambda_{11}(t', p, \varepsilon) + 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \lambda_{12}(t', p, \varepsilon) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \lambda_{22}(t', p, \varepsilon).$$

Переходя в (29) к пределу сначала при $k \to +\infty$, а затем при $\varepsilon \to 0$ и обозначая

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{11}(t', p, \varepsilon) = a_{11}(t', x_1, x_2),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{12}(t', p, \varepsilon) = a_{12}(t', x_1, x_2),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{22}(t', p, \varepsilon) = a_{22}(t', x_1, x_2),$$

находим:

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{Q_h}\Big\{f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - (y_1 - x_1)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} -$$

$$- (y_2 - x_2)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Big\}\frac{1}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}\, d\Phi_{\delta_k} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{Q_h - Q_\varepsilon}\Big\{f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - (y_1 - x_1)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} -$$

$$- (y_2 - x_2)\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Big\}\frac{1}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}\,\mu_2(t', p, dq) +$$

$$+ a_{11}(t', x_1, x_2)\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + 2a_{12}(t', x_1, x_2)\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2} +$$

$$+ a_{22}(t', x_1, x_2)\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}\,.$$

Так как

$$0 \leqslant \iint\limits_{Q_\rho}\{\nu(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2\}\frac{1}{\delta_k}P(t' - \delta_k, p; t', dq) =$$

$$= \lambda_{11}^{(k)}(t', p, \rho)\nu^2 + 2\lambda_{12}^{(k)}(t', p, \rho)\nu + \lambda_{22}^{(k)}(t', p, \rho)$$

при любом вещественном ν, то $a_{12}^2 - a_{21}a_{22} \leqslant 0$.

Дальнейший ход рассуждений не отличается от соответствующих рассуждений для одномерного случая.

Поступила в редакцию
20. 7. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
[2] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, изд. 2-е, М., 1954.
[3] К. Ито, О стохастических дифференциальных уравнениях, Периодический сборник переводов иностранных статей «Математика», I : 1 (1957), 78—116.
[4] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен., I, вып. 1 (1956), 38—60.
[5] W. Feller, The general diffussion operator and positivity preserving semigroups in one dimension, Ann. of Math., 60 : 3 (1954), 417—436.
[6] W. Feller, On second order differential operators, Ann. of Math., 61 : 1 (1955), 90—105.
[7] А. В. Мартынов, О локальной безграничной делимости марковских процессов, ДАН СССР, 113 : 4 (1957), 752—755.
[8] А. Д. Александров, Additive set functions in abstract spaces, Матем. сб. 8 (1940), 307—348; 9 (1941), 563—628; 13 (1943), 169—238.

ON INFINITESIMAL OPERATORS OF A CLASS OF MARKOV PROCESSES

K. V. MASLOV and ***A. Y. POVZNER*** (KHARKOV)

(*Summary*)

The basic purpose of the paper is to obtain a general form of infinitesimal operators for a class of Markov processes in n-dimensional space. It is shown that if transition probabilities satisfy certain rather general conditions, then an infinitesimal operator of the process is a natural generalization of the operator which was considered for the one-dimensional case by K. Ito in [6]. At the same time K. Ito's demand of "stochastic differentiation" of the process is replaced by other conditions which, as we see it, can be verified more simply.

All results in the paper are formulated in terms of transition probabilities; the connection of these results with properties of path functions is not discussed.

In the first part of the paper the form of the infinitesimal operator is ascertained for the one-dimensional case. Then, certain consequences which follow from it are obtained. In particular, the conditions which must be imposed on transition probabilities for the process to be of special form are ascertained. Finally, the case of an n-dimensional process is discussed.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1958

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО КАНАЛА С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

И. П. ЦАРЕГРАДСКИЙ

Для случая дискретной информации в работе [1] А. Я. Хинчина дается математически строгое доказательство теорем Шеннона [2] в предпосылках стационарного режима работы систем связи. Однако остается невыясненным вопрос о возможности обоснования обратных утверждений этих теорем. Цель настоящей заметки — установив точное соотношение между эргодической пропускной способностью C_e, введенной в [1], и стационарной пропускной способностью C_s, показать справедливость обратных утверждений теорем Шеннона.

Следуя работе [1] и сохраняя, по возможности, терминологию и обозначения, употребляемые в ней, рассмотрим стационарный канал $[A, \nu_x, B]$ без предвосхищения и с конечной памятью m. Напомним, что здесь $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_a\}$ и $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b\}$ — алфавиты, соответственно, на входе и выходе канала, а ν_x — однопараметрическое семейство вероятностных мер, устанавливающих связь между сообщениями на входе (образующими множество A^I):

$$X = (\ldots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots), \; x_i \in A \tag{1}$$

и сообщениями на выходе (образующими множество B^I):

$$Y = (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots), \; y_i \in B. \tag{2}$$

Обозначим через V_s — совокупность всевозможных питающих канал (A, ν_x, B) стационарных источников, и через V_e — множество всех эргодических источников. Имеет место тривиальное включение:

$$V_e \subset V_s. \tag{3}$$

Рассмотрим конечное поле вероятностей $P^{(n)}$, элементарными событиями которого служат всевозможные пары цепочек входа и выхода канала:

$$[(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}), (y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{n-1})] = [u^{(n)}, v^{(n-m)}]. \tag{4}$$

Если мощности алфавитов A и B равны соответственно a и b, то число таких различных пар равно $a^n b^{n-m}$. Вероятности этих элементарных событий определяются, согласно [1], следующим образом:

$$\omega(u^{(n)}, v^{(n-m)}) = \int_{u^{(n)}} \nu_x(v^{(n-m)})\, d\mu(x) = \mu(u^{(n)})\, \nu_{u^{(n)}}(v^{(n-m)}). \tag{5}$$

Далее, введем величину

$$R_{n,\mu}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{u^{(n)},\,v^{(n-m)}}\omega(u^{(n)},v^{(n-m)})\log\frac{\omega(u^{(n)},v^{(n-m)})}{\mu(u^{(n)})\eta(v^{(n-m)})}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{u^{(n)},\,v^{(n-m)}}\mu(u^{(n)})\nu_{u^{(n)}}(v^{(n-m)})\log\frac{\nu_{u^{(n)}}(v^{(n-m)})}{\sum\limits_{u^{(n)}}\mu(u^{(n)})\nu_{u^{(n)}}(v^{(n-m)})} \tag{6}$$

— количество переданной информации, приходящейся в среднем на одну букву входного сообщения (за время от $t=0$ до $t=n-1$).

Как впервые было доказано Мак Милланом ([3]), в случае стационарного источника $[A,\mu]$ всегда существует предел (при $n\to\infty$):

$$R_\mu(X,Y)=\lim_{n\to\infty}R_{n,\mu}(X,Y), \tag{7}$$

называемый скоростью передачи сообщений источника $[A,\mu]$ через заданный канал $[A,\nu_x,B]$. Эта скорость зависит, разумеется, от питающего канал источника $[A,\mu]$. Однако, верхняя грань величины $R_\mu(X,Y)$ по всевозможным источникам $[A,\mu]\in V_z\,(z=s,e)$ представляет собой величину, зависящую только от самого канала $[A,\nu_x,B]$ и потому являющуюся его важнейшей характеристикой. Обозначим ее $C_z=\sup\limits_{[A,\mu]\in V_z}R(X,Y)$ и назовем z-пропускной способностью канала связи. В случае, если $z=s$, $C_z=C_s$ называется стационарной пропускной способностью, если $z=e$, C_e — эргодическая пропускная способность. Тривиальным образом в силу $V_e\subset V_s$ имеем

$$C_e\leqslant C_s. \tag{8}$$

Возникает естественный вопрос в справедливости противоположного неравенства

$$C_e\geqslant C_s. \tag{9}$$

Следующая теорема в положительном смысле отвечает на этот вопрос.

Теорема. *Эргодическая пропускная способность C_e стационарного канала без предвосхищения и с конечной памятью т не менее стационарной пропускной способности C_s этого канала: $C_e\geqslant C_s$.*

Доказательство

1°. Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Строится величина C_0, удовлетворяющая неравенству:

$$C_0\geqslant C_s. \tag{10}$$

С другой стороны, показывается, что как бы мало ни было заданное число $\varepsilon>0$, найдется такой эргодический источник $[A,\bar{\mu}]$, что при включении этого источника в канал скорость передачи сообщений $R_{\bar{\mu}}(X,Y)$ будет удовлетворять неравенству

$$R_{\bar{\mu}}(X,Y)>C_0-\varepsilon. \tag{11}$$

Так как $C_e=\sup R_\mu(X,Y)$, то и подавно $C_e>C_0-\varepsilon$. Ввиду произвольной малости $\varepsilon>0$, отсюда вытекает, что

$$C_e\geqslant C_0. \tag{12}$$

При сравнении (10) и (12) получается требуемый результат.

2°. Пусть $P^{(n)}$ — рассмотренное ранее конечное поле вероятностей. На этом поле мы определили $R_{n,\mu}(X, Y)$ — среднюю скорость передачи сообщений источника $[A, \mu]$ через заданный канал, за время работы от $t = 0$ до $t = n - 1$. Введем величину

$$C_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\mu^{(n)}} R_{n,\mu}(X, Y). \tag{13}$$

Здесь мы обозначили $\mu^{(n)}$ распределение вероятностей, определенное на конечном поле $U^{(n)}$ элементарных событий $u^{(n)} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})$, $x_i \in A$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$; верхняя грань берется по всевозможным распределениям на $U^{(n)}$; индуцированным всевозможными (стационарными и нестационарными) распределениями μ на A^I.

Величина C_0, очевидно, всегда существует и конечна. Действительно:

$$R_{n,\mu}(X, Y) = \frac{H_n(X) - \mathrm{M}H_n(X \mid Y)}{n} \leqslant \frac{H_n(X)}{n} \leqslant \log a.$$

Покажем, что $C_s \leqslant C_0$. Пусть $\gamma > 0$ — как угодно малое положительное число. Так как $C_s = \sup_{\mu \in V_s} \lim_{n\to\infty} R_{n,\mu}$, то найдется такой стационарный источник $[A, \tilde{\mu}]$, что

$$R_{\tilde{\mu}}(X, Y) = \lim_{n\to\infty} R_{n,\tilde{\mu}}(X, Y) > C_s - \gamma \tag{14}$$

для заданного $\gamma > 0$. С другой стороны,

$$C_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\mu^{(n)}} R_{n,\mu}(X, Y) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} R_{n,\tilde{\mu}}(X, Y) = \lim_{n\to\infty} R_{n,\tilde{\mu}}(X, Y) = R_{\tilde{\mu}}(X, Y). \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), получаем

$$C_0 > C_s - \gamma. \tag{16}$$

Ввиду того, что неравенство (16) справедливо для любого $\gamma > 0$, имеем

$$C_0 \geqslant C_s. \tag{17}$$

3°. Теперь докажем соотношение (12):

$$C_e \geqslant C_0.$$

Как показано в 1°, для этого достаточно убедиться, что для любого малого числа $\varepsilon > 0$ всегда найдется эргодический источник $[A, \bar{\mu}]$ такой, что

$$R_{\bar{\mu}}(X, Y) > C_0 - \varepsilon. \tag{18}$$

Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое число, степень малости которого мы подчиним позднее некоторому условию, связанному с заданием исходного $\varepsilon > 0$. В силу определения (13) величины C_0, по заданному $\delta > 0$ найдутся такое n_0 и такой источник $[A, \mu_{n_0}]$, что

$$R_{n_0,\mu_{n_0}}(X, Y) > C_0 - \delta. \tag{19}$$

Здесь мы снабдили обозначение $[A, \mu_{n_0}]$ индексом n_0, чтобы подчеркнуть, что выбор источника предопределен выбором n_0. Далее везде для крат-

кости будем писать n вместо n_0 и μ_0 вместо μ_{n_0}. Найденный случайный процесс μ_0 (вообще говоря, нестационарный) определяет конечное поле вероятностей $U^{(n)}$, состоящее из a^n элементарных событий

$$u^{(n)} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \tag{20}$$

— всевозможных цепочек, выпускаемых источником $[A, \mu_0]$ за время t от 0 до $n-1$, с вероятностями

$$\mu_0^{(n)}(u^{(n)}) = \mu_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{21}$$

Для дальнейшего нам удобнее говорить вместо поля вероятностей $U^{(n)}$, заданного (20) и (21), об n-мерном случайном векторе:

$$\zeta^{(n)} = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}), \tag{22}$$

который принимает значения (20) с вероятностями (21).

Рассмотрим еще какую-нибудь случайную величину ζ, принимающую значения из алфавита A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a$, соответственно, с вероятностями $m_1, m_2, \ldots, m_a$, $m_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, a)$, $\sum_{i=1}^{a} m_i = 1$. Построим теперь следующим образом случайный процесс на пространстве A^I элементарных событий (1).

Выбираем число p, $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$, и полагаем, что в момент времени $t = 0$ с вероятностью, равной $\frac{p}{n+p}$, может появиться «вставка» — случайная величина $\zeta_0 = \zeta$, и с вероятностями, равными $\frac{1}{n+p}$, каждая из компонент вектора $\zeta_0^{(n)} = \zeta^{(n)}$. После «вставки», в последующие моменты времени $t = 1, 2, \ldots, n$ располагаются компоненты n-мерного случайного вектора $\zeta_1^{(n)}$, одинаково распределенного с вектором (22); затем, в момент $t = n+1$ с вероятностью p может появиться «вставка» — случайная величина ζ_1, одинаково распределенная с ζ, и с вероятностью $q = 1 - p$ не появиться. В последнем случае в моменты времени $t = n+1, \ldots, 2n$ «действует» случайный вектор $\zeta_2^{(n)}$, имеющий одинаковое распределение с (22), и т. д. Если при $t = 0$ появилась i-ая компонента $\zeta_{0,i-1}$ вектора $\tilde{\zeta}_0^{(n)} = (\zeta_{0,0}, \ldots, \zeta_{0,n-1})$, то при $t = -(i-1), \ldots, -1, 1, \ldots, n-i$ появляются соответственно $\zeta_{0,0}, \zeta_{0,1}, \ldots, \zeta_{0,i-2}, \zeta_{0,i}, \ldots, \zeta_{0,n-1}$. В момент $t = -i$ с вероятностью p может случиться «вставка» ζ_{-1} (распределенная одинаково с ζ). И так далее, вправо и влево от $t = 0$. Все случайные объекты $\zeta_i^{(n)}$, ζ_i; $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ независимы между собой. В пространстве A^I таким построением мы задаем вероятностную меру на совокупности цилиндрических множеств $F = \{x : x_{t_k} = \alpha_{i_k},\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Расширение этой меры на борелевское замыкание $\mathfrak{F}_A$ всех цилиндрических множеств F определит нам случайный процесс $\bar{\mu}$ и, значит, источник $[A, \bar{\mu}]$.

4°. Для доказательства эргодичности источника $[A, \bar{\mu}]$ нам потребуется несколько подробнее рассмотреть вопрос о характере следования (во времени) «вставок» ζ_i и компонент векторов $\zeta_k^{(n)}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Нетрудно заметить из построения меры $\bar{\mu}$, что расположение этих «вставок» и компонент зависит от случая. Этот случайный процесс есть про-

стая однородная цепь Маркова с $n+1$ состоянием: S_0 — «вставка», $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — первая, вторая, ..., n-я компоненты одного из векторов $\zeta_k^{(n)}$. Цепь задается начальными вероятностями этих состояний в момент времени $t=0$

$$q_0 = \frac{p}{n+p}, \quad q_i = \frac{1}{n+p}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

и матрицами перехода:

$$\mathbf{P}_+ = \| p_{ij}^+ \| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 0 \\ p & 1-p & 0 \ldots 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ для } t > 0, \tag{23}$$

$$\mathbf{P}_- = \| p_{ij}^- \| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ p & 0 \ldots 0 & 1-p \\ 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ для } t < 0, \tag{23'}$$

где p_{ij}^+ — вероятность появления состояния S_j, если в предшествующий момент времени случилось состояние S_i, p_{ij}^- — вероятность появления состояния S_j, если в последующий момент случилось состояние S_i. Характеристическое уравнение $f(u)=0$ для данной цепи (как при $t>0$, так и при $t<0$) имеет вид:

$$f(u) = u^{n+1} - uq - p = 0 \quad (q = 1-p)$$

$$\left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=1} = n + p \neq 0 \tag{24}$$

следовательно, $u=1$ — простой корень уравнения (24). Все другие корни (24) по модулю строго меньше единицы. Предположим противное, что существует корень $u_0 = e^{i\varphi}$ уравнения (24), где φ — действительное число $\varphi \neq 2k\pi$. Тогда $e^{i(n+1)\varphi} = e^{i\varphi}q + p$, но $|e^{i(n+1)\varphi}|^2 = 1$, а $|e^{i\varphi}q + p|^2 = (p + q\cos\varphi)^2 + q^2\sin^2\varphi = 1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}pq < 1$, что противоречиво. Значит, марковская цепь регулярна. Нетрудно подсчитать, что

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ (r\to-\infty)}} \mathbf{P}(t=r,\ S_j \mid t=0,\ S_i) = q_j \qquad (0 \leqslant j \leqslant n). \tag{25}$$

(Напомним, что q_j — начальные вероятности рассматриваемой цепи $q_0 = \frac{p}{n+p}$, $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n+p}$). Действительно, введя главные миноры $\mathbf{P}_{ii}^+(u), \mathbf{P}_{ii}^-(u)$; $i = 0, \ldots, n$, характеристических определителей $f^+(u) = |u\mathbf{E} - \mathbf{P}_+|$ и $f^-(u) = |u\mathbf{E} - \mathbf{P}_-|$, будем иметь (см. [4]): для $r>0$

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}(t=r, S_0 \mid t=0, S_i) = \frac{P_{00}^+(1)}{\sum_i P_{ii}^+(1)} = \frac{p}{n+p}$$

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}(t=r, S_j \mid t=0, S_i) = \frac{P_{jj}^{+}(1)}{\sum_i P_{ii}^{+}(1)} = \frac{1}{n+p} \quad (j=1, \ \dots \ , n).$$

для $r<0$

$$\lim_{r\to-\infty} \mathbf{P}(t=r, S_0 \mid t=0, S_i) = \frac{P_{00}^{-}(1)}{\sum_i P_{ii}^{-}(1)} = \frac{p}{n+p}$$

$$\lim_{r\to-\infty} \mathbf{P}(t=r, S_j \mid t=0, S_i) = \frac{P_{jj}^{-}(1)}{\sum_i P_{ii}^{-}(1)} = \frac{1}{n+p} \quad (j=1, \ \dots \ , n).$$

Важно еще заметить, что эта цепь устойчива

$$\mathbf{P}(t=r, S_j) = \mathbf{P}(t=0; S_j) = q_j \quad (0 \leqslant j \leqslant n) \tag{26}$$

для любого положительного или отрицательного целого r. Это следует непосредственно из равенства (25)

5°. Убедимся теперь, что $[A, \bar{\mu}]$ — эргодический источник. Стационарность процесса $\bar{\mu}$ легко следует, в силу его построения, из устойчивости марковской цепи 4°. Для доказательства эргодичности $\bar{\mu}$, по теореме Дуба [5] надо установить, что

$$\lim \bar{\mu}(F_1 \cdot T^r F_2) = \bar{\mu}(F_1) \cdot \bar{\mu}(F_2) \tag{27}$$

для любых $F_1 \in \mathfrak{F}_A$ и $F_2 \in \mathfrak{F}_A$. (Здесь T^r обозначает оператор «сдвига» элементов последовательности $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ на r шагов влево).

Достаточно доказать соотношение (27) для цилиндрических множеств, так как всегда можно найти такие цилиндры F_{T_1} и F_{T_2}, что $\bar{\mu}(F_1 \Delta F_{T_1}) < \gamma$, $\bar{\mu}(F_2 \Delta F_{T_2}) < \gamma$ для любого как угодно малого $\gamma > 0$ и любых $F_1 \in \mathfrak{F}_A$, $F_2 \in \mathfrak{F}_A$ (Δ означает симметрическую разность, т. е.

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E) = (E \cap F') \cup (E' \cap F)).$$

Пусть

$$F_1 = \{x : x_{t_0} = a_0, \ \dots \ , x_{t_p} = a_p\}, \ a_i \in A,$$

$$F_2 = \{x : x_{\tau_0} = \bar{a}_0, \ \dots \ , x_{\tau_k} = \bar{a}_k\}, \ \bar{a}_i \in A \ (t_0 < \tau_0)$$

— цилиндрические множества, тогда

$$T^r F_2 = \{x : x_{\tau_0 + r} = \bar{a}_0, \ \dots \ , x_{\tau_k + r} = \bar{a}_k\}.$$

Предположим, что

$$(\tau_0 + r) - t_p \geqslant n + 1 \tag{28}$$

и обозначим $\mathbf{P}(\{t=r; \ S_i\} \cdot F_1 \cdot \{t=k; \ S_j\} \cdot F_2)$ — вероятность совместного наступления событий

$$F_1, \ F_2, \ \{t=r, S_i\}, \ \{t=k, \ S_j\}$$

(определение двух последних событий см. в 4°), $\mathbf{P}(\{t=r, S_j\} \cdot F / t=k, S_i)$ —

вероятность наступления событий F и $\{t=r, S_j\}$ при условии, что осуществилось событие $\{t=k,\ S_i\}$, и т. д. Тогда:

$$\bar{\mu}(F_1\cdot T^rF_2)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1\cdot\{t=\tau_0+r, S_j\}\cdot T^rF_2)=$$

$$=\sum_{i,j}\mathbf{P}(\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1\{t=\tau_0+r; S_j\})\cdot\mathbf{P}(T^rF_2/t=\tau_0+r, S_j), \quad (29а)$$

так как

$$\mathbf{P}(T^rF_2/\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1\cdot\{t=\tau_0+r; S_j\})=\mathbf{P}(T^rF_2/t=\tau_0+r; S_j).$$

Ввиду неравенства (28) это соотношение следует из построения процесса $\bar{\mu}$. На том же основании:

$$\mathbf{P}(t=\tau_0+r; S_j/\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1)=\frac{\mathbf{P}(\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1\cdot\{t=\tau_0+r; S_j\})}{\mathbf{P}(\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1)}=$$

$$=\frac{\mathbf{P}(\{t=t_0, S_i\}\cdot\{t=\tau_0+r, S_j\})\cdot\mathbf{P}(F_1/\{t=t_0, S_i\}\cdot\{t=\tau_0+r, S_j\})}{\mathbf{P}(t=t_0, S_i)\cdot\mathbf{P}(F_1/t=t_0, S_i)}=$$

$$=\frac{\mathbf{P}(\{t=t_0; S_i\}\cdot\{t=\tau_0+r; S_j\})}{\mathbf{P}(t=t_0, S_i)}=\mathbf{P}(t=\tau_0+r;\ S_j/t=t_0, S_i).$$

Поэтому

$$\sum_{i,j=0}^{n}\mathbf{P}(\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1\cdot\{t=\tau_0+r; S_j\})\cdot\mathbf{P}(T^rF_2/t=\tau_0+r; S_j)=$$

$$=\sum_{i,j}\mathbf{P}(t=t_0, S_i)\,\mathbf{P}(F_1/t=t_0; S_i)\,\mathbf{P}(t=\tau_0+r; S_j/t=t_0, S_i)\cdot\mathbf{P}(T^rF_2/t=$$

$$=\tau_0+r; S_j). \quad (29б)$$

В силу стационарности процесса $\bar{\mu}$ и устойчивости марковской цепи 4° $\mathbf{P}(T^rF_2/t=\tau_0+r; S_j)=\mathbf{P}(F_2/t=\tau_0; S_j)$. Отсюда, наконец:

$$\sum_{i,j}^{n}\mathbf{P}(t=t_0; S_i)\,\mathbf{P}(F_1/t=t_0, S_i)\cdot\mathbf{P}(t=\tau_0+r; S_j/t=t_0, S_i)\,\mathbf{P}(F_2/t=\tau_0, S_i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}(t=t_0, S_i)\,\mathbf{P}(F_1/t=t_0, S_i)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(F_2/t=\tau_0, S_j)\,\mathbf{P}(t=\tau_0+r; S_j/t=t_0; S_i) \quad (29в)$$

(29а), (29б), (29в) дают нам равенство:

$$\bar{\mu}(F_1\cdot T^rF_2)=\sum_{i=0}^{n}\{\mathbf{P}(t=t_0; S_i)\,\mathbf{P}(F_1/t=t_0, S_i)\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(F_2/t=\tilde{t}_0; S_j)\cdot\mathbf{P}(t=\tau_0+r,\ S_j/t=t_0, S_i)\}. \quad (29)$$

Пользуясь (29) и полученными ранее соотношениями (25), (26) 4°, имеем:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \bar{\mu}(F_1 \cdot T^r F_2) = \sum_{i=0}^{n} \{\mathbf{P}(t=t_0, S_i)\,\mathbf{P}(F_1/t=t_0;\ S_i)\cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{n} \varlimsup_{r\to\infty} \mathbf{P}(t=\tau_0+r,\ S_j/t=t_0;\ S_i)\,\mathbf{P}(F_2/t=\tau_0;\ S_j)\} =$$

$$= \sum_i \mathbf{P}(\{t=t_0, S_i\}\cdot F_1) \sum_j \mathbf{P}(t=\tau_0;\ S_j)\,\mathbf{P}(F_2/t=\tau_0;\ S_j) = \bar{\mu}(F_1)\cdot\bar{\mu}(F_2),$$

что и требовалось показать.

6°. Скорость передачи информации при питании канала $[A, \nu_x, B]$ найденным эргодическим источником $[A, \bar{\mu}]$ будет равна

$$R_{\bar{\mu}}(X, Y) = \varlimsup_{N\to\infty} R_{N,\bar{\mu}}(X, Y).$$

Выберем $N = ns$ так, чтобы

$$R_{N,\bar{\mu}}(X, Y) < R_{\bar{\mu}}(X, Y) + \delta \tag{30}$$

для заданного малого числа $\delta > 0$. Далее, оценим снизу величину $R_{N,\bar{\mu}}(X, Y)$. Чтобы получить интересующую нас оценку, воспользуемся следующими леммами:

Лемма 1. *Пусть даны два случайных объекта ξ и η с областями возможных значений $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$. Распределение вероятностей для ξ определяется случайным параметром λ с областью возможных значений $\Lambda = \{\lambda_i\}$, так что $\mathbf{P}_\xi(x) = \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i)\,\mathbf{P}_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x)$. Совместное распределение λ, ξ, η задается условием, что λ, ξ, η — марковская последовательность: $p_{\eta|\lambda,\xi}(y) = p_{\eta|\xi}(y)$. Тогда $\mathbf{M}_\lambda I(\xi, \eta/\lambda=\lambda_i) = \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i)\, I(\xi, \eta/\lambda=\lambda_i) \leqslant \leqslant I(\xi, \eta)$, где*

$$I(\xi, \eta) = \sum_{X,Y} p_{\xi\eta}(x, y) \log \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)\, p_\eta(y)}. \tag{*}$$

Доказательство. Совместное распределение ξ и η задается:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = p_\xi(x)\, p_{\eta|\xi}(y) = p_{\eta|\xi}(y) \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i)\, p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x),$$

а распределение вероятностей для η

$$p_\eta(y) = \sum_X p_\xi(x)\, p_{\eta|\xi}(y) = \sum_X p_{\eta|\xi}(y) \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i)\, p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x) =$$

$$= \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i) \sum_X p_{\eta|\xi}(y)\, p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x) = \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i)\, p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y).$$

Поэтому

$$\mathbf{M}_\lambda I(\xi, \eta/\lambda=\lambda_i) = \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i)\, I(\xi, \eta/\lambda=\lambda_i) =$$

$$= \sum_\Lambda p(\lambda=\lambda_i) \sum_{X,Y} p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x)\, p_{\eta|\xi}(y) \log \frac{p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x)\, p_{\eta|\xi}(y)}{p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x)\, p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y)} = \tag{31}$$

$$= \sum_X \sum_\Lambda p(\lambda = \lambda_i)\, p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x) \sum_Y p_{\eta|\xi}(y) \log p_{\eta|\xi}(y) - \sum_\Lambda p(\lambda = \lambda_i) \sum_Y \log p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) \cdot$$

$$\cdot \sum_X p_\xi^{\lambda=\lambda_i}(x)\, p_{\eta|\xi}(y) = \sum_X p_\xi(x) \sum_Y p_{\eta|\xi}(y) \log p_{\eta|\xi}(y) -$$

$$- \sum_\Lambda p(\lambda = \lambda_i) \sum_Y p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) \log p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y).$$

Функция $\varphi(u) = -u \log u$ вогнута при $u > 0$, поэтому для $u_i > 0$, $p_i \geqslant 0$, $\sum_i p_i = 1$, имеет место неравенство (см. [6]): $\sum_i p_i \varphi(u_i) \leqslant \varphi\left(\sum_i p_i u_i\right)$. Полагая $p_i = p(\lambda = \lambda_i)$, $u_i = p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y)$, получим

$$- \sum_\Lambda p(\lambda = \lambda_i) \sum_Y p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) \log p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) \leqslant - \sum_Y \left(\sum_\Lambda p(\lambda = \lambda_i)\, p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) \right) \cdot$$

$$\cdot \log \left(\sum_\Lambda p(\lambda = \lambda_i) \cdot p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) \right) = - \sum_Y p_\eta(y) \log p_\eta(y). \qquad (32)$$

Сравнивая (31) и (32), имеем окончательный результат:

$$\mathbf{M}_\lambda I(\xi, \eta/\lambda = \lambda_i) = - \sum_\Lambda p(\lambda = \lambda_j) \sum_Y p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) \log p_\eta^{\lambda=\lambda_i}(y) +$$

$$+ \sum_X p_\xi(x) \sum_Y p_{\eta|\xi}(y) \log p_{\eta|\xi}(y) \leqslant - \sum_Y p_\eta(y) \log p_\eta(y) +$$

$$+ \sum_X p_\xi(x) \sum_Y p_{\eta|\xi}(y) \log p_{\eta|\xi}(y) = H(\eta) - \mathbf{M}_\xi H(\eta/\xi) = I(\xi, \eta).$$

Лемма 2. *Пусть* $\xi^{(k)} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ *и* $\eta^{(l)} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l)$ *— два случайных вектора,* L_1 *и* L_2 *— какие-нибудь линейные преобразования их. Тогда:*

$$I(\xi^{(k)}, \eta^{(l)}) \geqslant I(L_1 \xi^{(k)}, L_2 \eta^{(l)}).$$

Лемма 3. *Если пары случайных объектов* $[\xi_1, \eta_1]$, $[\xi_2, \eta_2], \ldots, [\xi_k, \eta_k]$ *взаимно независимы, то*

$$I([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k], [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k]) = \sum_{j=1}^{k} I(\xi_j; \eta_j).$$

Доказательства двух последних лемм можно найти в работе [7].

Теперь вернемся к оценке величины $R_{N,\bar{\mu}}(X, Y)$

$$R_{N,\bar{\mu}}(X, Y) = \frac{I(\bar{\xi}^{(N)}, \bar{\eta}^{(N-m)})}{N}, \qquad (33)$$

где $\bar{\xi}^{(N)} = (\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \ldots \bar{\xi}_{N-1})$, $\bar{\eta}^{(N-m)} = (\bar{\eta}_m, \bar{\eta}_{m+1}, \ldots, \bar{\eta}_{N-1})$ — случайные векторы, образованные, соответственно, первый — процессом $\bar{\mu}$ при фиксировании моментов времени $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, второй — процессом $\bar{\eta}_i = \int_{A^I} \nu_x d\bar{\mu}(x)$ при фиксировании $t = m, m+1, \ldots, N-1$.

Воспользуемся леммой 1, полагая $\xi = \bar{\xi}^{(N)}$

$\eta = \bar{\eta}^{(N-m)}$, $\lambda : [\lambda_i = \{t = 0, S_i\}, \; p(\lambda = \lambda_i) = p(t = 0, S_i) = q_i]$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Тогда:

$$I(\bar{\xi}^{(N)}, \bar{\eta}^{(N-m)}) \geqslant \mathbf{M}\, I(\bar{\xi}^{(N)}, \bar{\eta}^{(N-m)}/t=0;\ S_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} q_i I(\bar{\xi}^{(N)}, \bar{\eta}^{(N-m)}/t=0;\ S_i) \geqslant \min_{0\leqslant i\leqslant n} I(\bar{\xi}^{(N)}, \bar{\eta}^{(N-m)}/t=0;\ S_i) =$$

$$I(\bar{\xi}^{(N)}, \bar{\eta}^{(N-m)}/t=0;\ S_{i_0}) = I(\xi^{(N)}, \eta^{(N-m)}), \tag{34}$$

где $\{t=0,\ S_{i_0}\}$ — условие, доставляющее минимум

$$I(\bar{\xi}^{(N)}, \bar{\eta}^{(N-m)}/t=0;\ S_i), \quad 0\leqslant i\leqslant n.$$

Последнее равенство в (34) мы написали на том основании, что пара случайных векторов $\bar{\xi}^{(N)}$ и $\bar{\eta}^{(N-m)}$ определяет при фиксации условия $\{t=0;\ S_{i_0}\}$ другую [пару $\xi^{(N)}$, $\eta^{(N-m)}$:

$$\xi^{(N)} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) = (\zeta_{0,i_0-1}, \zeta_{0,i_0}, \ldots \zeta_{0,n-1};\ \xi_{n-i_0+1}, \ldots, \xi_{N-1}),$$

где $\zeta_{0,i_0-1}, \zeta_{0,i_0}, \ldots, \zeta_{0,n-1}$ суть i_0-я, $\ldots$, n-я компоненты исходного вектора построения 3°

$$\zeta_0^{(n} = (\zeta_{0,0}, \zeta_{0,1}, \ldots, \zeta_{0,n-1}) \text{ и } \eta^{(N-m)} = (\eta_m, \eta_{m+1}, \ldots, \eta_{N-1}).$$

В силу построения случайного процесса $\bar{\mu}$, вектор $\xi^{(N)}$ в свою очередь зависит от случайного параметра $\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{N-1})$, где каждая компонента ν_k принимает значения 1 или 0 в зависимости от появления или непоявления «вставки» в момент времени $t=k\,(0\leqslant k\leqslant N-1)$. Снова пользуясь леммой 1 для случайных векторов $\xi^{(N)}$, $\eta^{(N-m)}$ и параметра ν, принимающего с вероятностями $p(\nu=\bar{\nu})$ фиксированные значения $\bar{\nu}$, будем иметь

$$I(\xi^{(N)}, \eta^{(N-m)}) \geqslant \mathbf{M}_\nu I(\xi^{(N)}, \eta^{(N-m)}/\nu=\bar{\nu}) =$$

$$= \sum_{\nu} p(\nu=\bar{\nu})\, I(\xi^{(N)}, \eta^{(N-m)}/\nu=\bar{\nu}). \tag{35}$$

Рассмотрим величину

$$I(\xi^{(N)}, \eta^{(N-m)}/\nu=\bar{\nu}) = I(\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}, \eta_{\bar{\nu}}^{(N-m)}),$$

где $\eta_{\bar{\nu}}^{(N-m)}$, $\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}$ — случайные векторы, полученные из пары $\eta^{(N-m)}$, $\xi^{(N)}$ фиксированием условия $\nu=\bar{\nu}$, имеют, к примеру, следующий вид:

$$\eta_{\bar{\nu}}^{(N-m)} = (\eta_m^{\bar{\nu}}, \eta_{m+1}^{\bar{\nu}}, \ldots, \eta_{N-1}^{\bar{\nu}})$$

$$\xi_{\bar{\nu}}^{(N)} = (\xi_0^{\bar{\nu}}, \xi_1^{\bar{\nu}}, \ldots, \xi_{N-1}^{\bar{\nu}})] =$$

$$= (\zeta_{0,i_0-1}, \zeta_{0,i_0}, \ldots, \zeta_{0,n-1};\ \zeta_1;\ \zeta_{1,0}, \ldots \zeta_{1,n-1};\ \ldots \zeta_{k_{\bar{\nu}},0}, \ldots \zeta_{k_{\bar{\nu}},\,n-1};\ \ldots \zeta_{k_{\bar{\nu}}+1,i_1})$$

(в этом примере: $\nu=(\nu_0=0, \ldots, \nu_{n-i_0}=0, \nu_{n-i_0+1}=1, \nu_{n-i_0+2}=0, \ldots, \nu_{N-1}=0)$).

Напомним, что

$$\zeta_{0,i_0-1}, \ldots, \zeta_{0,n-1};\ \zeta_{1,0}, \ldots, \zeta_{1,n-1}, \ldots, \zeta_{k_\nu+1,i_1}$$

компоненты случайных векторов построения 3° процесса $\bar{\mu}$:

$$\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_{k_{\bar{\nu}}}^{(n)}, \zeta_{k_{\bar{\nu}}+1}^{(n)}.$$

Сделаем линейные преобразования над всеми векторами $\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}$ и $\eta_{\bar{\nu}}^{(N-m)}$ для всех возможных $\bar{\nu}$ (для каждого $\bar{\nu}$ — свое), которые можно описать следующим образом. Образы $L_{\bar{\nu}}\xi_{\bar{\nu}}^{(N)} = \xi^{N\bar{\nu}}$ векторов $\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}$ получаются из $\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}$ «отбрасыванием» компонент начального и конечного векторов построения $\zeta_{\bar{\nu}0}^{(n)}$ и $\zeta_{\bar{\nu}k_{\bar{\nu}}+1}^{(n)}$, если последние входят в вектор $\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}$ не всеми своими компонентами, и «выбрасыванием» всех «вставок». Для получения образов $\widetilde{L}_{\bar{\nu}}\eta_{i_{\bar{\nu}}}^{(N-m)} = \eta_i^{(N-m)\bar{\nu}}$ векторов $\eta_{i_{\bar{\nu}}}^{(N-m)}$ из прообразов «выбрасываются» компоненты с номерами, равными номерам «выброшенных» компонент векторов $\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}$, и вдобавок еще — группы из m компонент, соответствующих (т. е. имеющих одинаковые номера) первым компонентам векторов построения $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_{k_{\bar{\nu}}}^{(n)}$, входящих в $\xi^{N\bar{\nu}} = L_{\bar{\nu}}\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}$. Эти преобразования переводят каждые два случайных вектора $\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}, \eta_{i_{\bar{\nu}}}^{(N-m)}$ в пару других $(\xi^{N\bar{\nu}}, \eta^{(N-m)\bar{\nu}})$, состоящую, вследствие построения процесса $\bar{\mu}$, стационарности канала $[A, \nu_x, B]$ и конечности его памяти m, из $k_{\bar{\nu}}$ независимых одинаково распределенных пар:

$$(\xi^{N\bar{\nu}}, \eta^{(N-m)\bar{\nu}}) = ([\zeta_1^{(n)}, \eta_{i_1}^{(n-m)}], [\zeta_2^{(n)}, \eta_{i_2}^{(n-m)}], \ldots, [\zeta_{k_{\bar{\nu}}}^{(n)}, \eta_{i_{k_{\bar{\nu}}}}^{(n-m)}]).$$

(Отметим, что здесь мы существенно пользуемся конечностью памяти канала). Применяя лемму 2 к каждой величине $I(\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}, \eta_{i_{\bar{\nu}}}^{(N-m)})$, имеем:

$$\sum_{\bar{\nu}} p(\nu = \bar{\nu})\, I(\xi_{\bar{\nu}}^{(N)}, \eta_{i_{\bar{\nu}}}^{(N-m)}) \geqslant \sum_{\bar{\nu}} p(\nu = \bar{\nu})\, I(\xi^{N\bar{\nu}}, \eta^{(N-m)\bar{\nu}}). \tag{36}$$

Теперь, воспользовавшись леммой 3, которая приложима к каждой паре $(\xi^{N\bar{\nu}}, \eta^{(N-m)\bar{\nu}})$, получим

$$\sum_{\bar{\nu}} p(\nu = \bar{\nu})\, I(\xi^{N\bar{\nu}}, \eta^{(N-m)\bar{\nu}}) = \sum_{\bar{\nu}} p(\nu = \bar{\nu}) \sum_{i=1}^{k_{\bar{\nu}}} I(\zeta_i^{(n)}, \eta_i^{(n-m)}) =$$

$$= I(\zeta_i^{(n)}, \eta_i^{(n-m)}) \cdot \sum_{\bar{\nu}} p(\nu = \bar{\nu})\, k_{\bar{\nu}}. \tag{37}$$

Но, в силу (*) и (19):

$$I(\zeta_i^{(n)}, \eta_i^{(n-m)}) = nR_{n,\mu_0}(X, Y) > n(C_0 - \delta). \tag{38}$$

Величина $\sum_{\bar{\nu}} p(\nu = \bar{\nu})\, k_{\bar{\nu}}$ есть не что иное, как математическое ожидание числа таких векторов построения 4° $\zeta_i^{(n)}$, которые за промежуток времени $t = N = ns$ появляются всеми $k_{\bar{\nu}}$ своими компонентами (при условии, что в начальный момент $t = 0$ случилась i_0-я компонента вектора $\zeta_{\bar{\nu}0}^{(n)}$). Эта величина, очевидно, не меньше математического ожидания числа появления векторов $\zeta_i^{(n)}$ за время длительностью $t = n(s - 2)$, равного, как не трудно проверить, $(s-2)\frac{n}{n+p}$. Поэтому:

$$\sum_{\bar{\nu}} p(\nu = \bar{\nu})\, k_{\bar{\nu}} \geqslant \frac{(s-2)\,n}{n+p}. \tag{39}$$

Неравенства (30), (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39) дают нам, наконец, соотношение:

$$R_{\bar{\mu}}(X, Y) + \delta > (C_0 - \delta)\,\frac{s-2}{s}\,\frac{n}{n+p}. \tag{40}$$

Выбирая в предыдущих рассуждениях надлежащим образом $\delta > 0$, n и s, мы получим для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$: $R_{\mu}^{-}(X, Y) > C_0 - \varepsilon$. Этим, согласно 1°, теорема полностью доказана.

Замечание. Введенная нами при доказательстве величина (13):

$$C_0 = \overline{\lim_{n}} \sup_{\mu(n)} R_{n,\mu}(X, Y)$$

может служить разумным определением пропускной способности стационарного канала $[A, \nu_x, B]$ при включении в него всевозможных (стационарных и нестационарных) источников $[A, \mu]$. Можно было пойти по другому пути и определить в этом общем случае пропускную способность канала по аналогии со стационарным случаем как:

$$C_1 = \sup_{\mu} \overline{\lim_{n \to \infty}} R_{n,\mu}(X, Y). \tag{41}$$

Однако нетрудно показать, что

$$C_1 = C_0. \tag{42}$$

Действительно, с одной стороны,

$$C_1 \geqslant C_e \geqslant C_0. \tag{43}$$

С другой стороны, выбрав как угодно малое положительное число γ и источник μ^* такой, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} R_{n,\mu^*}(X, Y) > C_1 - \gamma,$$

будем иметь:

$$C_0 = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{\mu(n)} R_{n,\mu}(X, Y) \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} R_{n,\mu^*}(X, Y) > C_1 - \gamma. \tag{44}$$

Ввиду произвольного выбора малого $\gamma > 0$ из (44) следует, что

$$C_0 \geqslant C_1. \tag{45}$$

Сравнение (43) и (45) дает нам соотношение (42).

Проведенное доказательство дает нам больше, нежели утверждается в теореме; именно, из него следует такой важный результат: точная верхняя грань скоростей передачи информации, исходящей от любого данного источника через канал $R_{\mu}(X, Y) = \overline{\lim_{n \to \infty}} R_{n,\mu}(X, Y)$ ($R_{\mu}(X, Y) = \lim_{n \to \infty} R_{n,\mu}(X, Y)$ для стационарных источников) достигается на множестве V_e всех эргодических источников. В самом деле, сравнивая (8), (10), (12) и (42) будем иметь

$$C_s = C_0 = C_1 = C_e. \tag{46}$$

Из данной теоремы вытекает очевидное следствие.

Следствие. Обратные утверждения теорем Шеннона (когда $H_0 > C$) ввиду равенств (46) легко получаются методом, предложенным Шенноном.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить А. Я. Хинчина за постановку задачи и А. Н. Колмогорова за помощь в ее решении.

Поступила в редакцию
10.10.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Об основных теоремах теории информации, Успехи Матем. наук, XI, вып. 1 (1956), 17—75.
[2] C. E. Channon and W. Weaver, The mathematical theory of communications, Univ. Illinois Press, 1949, 3—89.
[3] Mc Millan, Brockway, The basic theorems of information theory Ann. Math. Statistics, 24, No 2 (1953), 196—219.
[4] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, ГИТТЛ, 1949, 28—31.
[5] J. L. Doob. Stochastic processes, John Wiley and Sons, New York, 1953.
[6] Г. Харди, Д. Литтльвуд, С. Полиа, Неравенства, ГИИИ, 1948, 93.
[7] А. Н. Колмогоров, И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, Количество информации и энтропия для непрерывных распределений, Доклад на III Всесоюзн. Математич. съезде, 1956.

ON THE CAPACITY OF A STATIONARY CHANNEL WITH FINITE IMPRESSION

I. P. TSAREGRADSKY (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The proof of the equality of ergodic capacity C_e of a stationary channel with finite impression without prediction and stationary capacity C_s of this channel usind the terms in [1] is given.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том III Выпуск 1
1958

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УСЛОВИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ МАРТИНГАЛА

Р. Л. ДОБРУШИН

Цель этой заметки — доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\{\zeta_t,\ t \in [0,\ 1]\}$ — *сепарабельный мартингал. Если для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $\Delta t \to 0$

$$\sup_{t \in [0,1-\Delta t]} \mathbf{P}\{|\zeta_t - \zeta_{t+\Delta t}| > \varepsilon\} = o(\Delta t), \tag{1}$$

то почти все выборочные функции процесса ζ_t *являются непрерывными.*

Отметим, что, как показали Дынкин [2] и Кинни [3], близкое условие является достаточным для непрерывности выборочных функций марковского процесса. Для произвольного сепарабельного вероятностного процесса достаточным условием непрерывности выборочных функций является условие Колмогорова (см. [1], прилож. переводчиков): при некотором $\varepsilon > 0$ и $p > 0$

$$\sup_{t \in [0,1-\Delta t]} \mathbf{M}\{|\zeta_t - \zeta_{t+\Delta t}|^p\} = o(|\Delta t|^{1+\varepsilon}). \tag{2}$$

Известны примеры, показывающие, что в (2) нельзя положить $\varepsilon = 0$, и, следовательно, условие (1) также не является достаточным для непрерывности выборочных функций общего процесса.

Теорема 1 получается как следствие следующей более общей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\{\zeta_t,\ t \in [0,\ 1]\}$ — *сепарабельный вероятностный процесс. Если выполнено условие* (1) *теоремы* 1, *то почти все выборочные функции не имеют разрывов первого рода.*

Напомним, что разрывом первого рода функции $x(t)$ называется точка t такая, что существуют не равные друг другу $\lim\limits_{\tau \to t+0} x(\tau)$ и $\lim\limits_{\tau \to t-0} x(\tau)$. Дубом (см. [1], стр. 324) доказано, что для почти всех выборочных функций сепарабельного мартингала все разрывы являются разрывами первого рода. Следовательно, из теоремы 2 и результата Дуба немедленно следует теорема 1.

Приступая к доказательству теоремы 2, заметим сразу, что из основного условия (1) вытекает стохастическая непрерывность процесса и поэтому (см. [1], стр. 61) существует такой процесс $\tilde{\zeta}_t$, что при любом t

$$\mathbf{P}\{\zeta_t = \tilde{\zeta}_t\} = 1, \tag{3}$$

и процесс $\tilde{\zeta}_t$ является сепарабельным и измеримым. Если мы докажем, что процесс $\tilde{\zeta}_t$ обладает выборочными функциями, без разрывов второго рода, то из равенства (3) будет следовать, что тем же свойством обладает и процесс ζ_t. Поэтому мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением измеримых и сепарабельных процессов.

Будем обозначать $\Omega = \{\omega\}$ пространство элементарных событий. Предположение об измеримости означает, по определению, что $\zeta_t(\omega)$ является измеримой функцией пары переменных t и ω. Обозначим $A_{\varepsilon,\,\Delta t}$ множество таких пар (t, ω), что $|\zeta_t(\omega) - \zeta_{t+\Delta t}(\omega)| > \varepsilon$. Условие (1) означает, что при фиксированном t равномерно по всем t

$$\mathbf{P}\{(t,\ \omega) \in A_{\varepsilon,\,\Delta t}\} = o(\Delta t).$$

Следовательно, по теореме Фубини двумерная мера множества $A_{\varepsilon,\,\Delta t}$ также есть $o(\Delta t)$. Обозначим теперь $m_{\varepsilon,\,\Delta t}(\omega)$ меру Лебега множества точек t таких, что $|\zeta_t(\omega) - \zeta_{t+\Delta t}(\omega)| > \varepsilon$. Применяя снова теорему Фубини, видим, что мера множества $A_{\varepsilon,\,\Delta t}$ совпадает с математическим ожиданием случайной величины $m_{\varepsilon,\,\Delta t}(\omega)$, так что при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{M} m_{\varepsilon,\,\Delta t}(\omega) = o(\Delta t). \tag{4}$$

С другой стороны, если некоторая функция $x(t)$ имеет в точке t_0 разрыв первого рода, то существует столь малое ε, что при $t - \varepsilon < t' < t_0 < t'' < t + \varepsilon$ разность $|x(t') - x(t'')| > \varepsilon$, и поэтому при $\Delta t \leqslant \varepsilon$ мера Лебега множества точек τ таких, что $|x(\tau) - x(\tau + \Delta t)| > \varepsilon$ не меньше Δt. Если случайная функция $\zeta_t(\omega)$ имеет разрывы первого рода для множества элементарных событий вероятности $p > 0$, то, как следует из сказанного выше, для достаточно малого ε с вероятностью, не меньшей $\frac{p}{2}$, величина $m_{\varepsilon,\,\Delta t}(\omega) \geqslant \Delta t$, и значит

$$\mathbf{M} m_{\varepsilon,\,\Delta t}(\omega) \geqslant \frac{p}{2}\,\Delta t. \tag{5}$$

Противоречие между (4) и (5) доказывает теорему.

Поступила в редакцию
25. 9. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Дуб, Стохастические процессы, М., 1956.
[2] Е. Б. Дынкин, Критерий непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, сер. матем., 16 (1952), 563—572.
[3] J. R. Kinney, Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. Am. Math. Soc., 74 (1953), 280—302.

THE CONTINUITY CONDITION FOR SAMPLE MARTINGALE FUNCTIONS

R. L. DOBRUSHIN (MOSCOW)

(*Summary*)

It is proved that the condition

$$\sup_{t \in [0,1-\Delta t]} \mathbf{P}\{|\zeta_t - \zeta_{t+\Delta t}| > \varepsilon\} = o(\Delta t) \qquad \text{for any } \varepsilon > 0 \tag{1}$$

is sufficient for almost all sample functions of a separable stochastic process $\{\zeta_t,\ t \in [0, 1]\}$ not to have first order discontinuities. If the process $\{\zeta_t,\ t \in [0, 1]\}$ is a martingale process, it is sufficient that almost all sample functions of a separable process are continuous.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ

цзян цзэ-пей

Пусть ξ, η — случайные величины, принимающие произвольные вещественные значения *, и пусть P_ξ, P_η — соответственные распределения вероятностей случайных величин ξ и η, а $P_{\xi\eta}$ — их совместное распределение вероятностей, т. е. P_ξ и P_η — вероятностные меры, определенные на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств вещественной прямой $\mathfrak{E}$, $P_{\xi\eta}$ — вероятностная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$. Разобьем пространство $\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}$ на конечное число непересекающихся множеств из σ-алгебры $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$. Рассмотрим теперь

$$\sup \sum_{i=1}^{n} P_{\xi\eta}(S_i) \log \frac{P_{\xi\eta}(S_i)}{P_\xi P_\eta(S_i)}, \tag{1}$$

где верхняя грань берется всевозможным таким разбиениям пространства $\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}$. Так, определенную верхнюю грань $J_1(\xi, \eta)$ можно назвать количеством информации относительно ξ, содержащимся в η. Однако можно было бы рассматривать также и разбиения на непересекающиеся множества несколько менее общего вида, например, на всевозможные обобщенные прямоугольники (т. е. множества вида $S_i = B\times B'$, где B, $B'\in\mathfrak{B}$) или на всевозможные прямоугольники (т. е. множества $S_i=\Delta\times\Delta'$, где Δ, Δ' — интервалы). Ясно, что при переходе к более узкому классу множеств верхняя грань (1) может только уменьшаться. Соответствующие верхние грани (1) (где под $S_1, \ldots, S_n$ теперь понимаются множества вида $B_i\times B'_k$ или $\Delta_i\times\Delta'_k$ соответственно, будем обозначать $J_2(\xi, \eta)$ и $J_3(\xi, \eta)$, т. е. положим

$$J_2(\xi, \eta) = \sup \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} P_{\xi\eta}(B_i\times B'_k) \log \frac{P_{\xi\eta}(B_i\times B'_k)}{P_\xi(B_i) P_\eta(B'_k)}, \tag{2}$$

$$J_3(\xi, \eta) = \sup \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} P_{\xi\eta}(\Delta_i\times\Delta'_k) \log \frac{P_{\xi\eta}(\Delta_i\times\Delta'_k)}{P_\xi(\Delta_i) P_\eta(\Delta'_k)}. \tag{3}$$

Все эти различные определения количества информации $J_i(\xi, \eta)$; $i=1, 2, 3$, были рассмотрены в недавно опубликованной статье И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [1], причем в этой статье фактически были доказаны, хотя и не были вполне аккуратно сформулированы, следующие предложения:

1°. Если распределение вероятностей $P_{\xi\eta}$ не абсолютно непрерывно относительно распределения вероятностей $P_\xi P_\eta$, то

$$J_2(\xi, \eta) = +\infty, \tag{4}$$

в случае же, когда σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей все интервалы, имеет место также и равенство

$$J_3(\xi, \eta) = +\infty. \tag{5}$$

2°. Если распределение вероятностей $P_{\xi\eta}$ абсолютно непрерывно относительно распределения вероятностей $P_\xi P_\eta$, то

---

* В настоящей работе рассматриваются лишь случайные величины, принимающие вещественные значения; переход к случайным величинам, принимающим значения в произвольном абстрактном пространстве, не вносит никаких принципиальных усложнений.

$$J_1(\xi,\ \eta) = \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} \alpha\ (x,\ y) \log \alpha\ (x,\ y)\, P_\xi\,(dx)\, P_\eta\,(dy), \tag{6}$$

где $\alpha\ (x,y) = \dfrac{d^2P_{\xi\eta}}{dP_\xi dP_\eta}$.

Целью настоящей работы является доказательство следующих ниже теорем 1 и 2. Эти теоремы показывают, что при некоторых ограничениях на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ все указанные верхние грани будут равны друг другу (и равны интегралу (6)), так что различные определения информации здесь оказываются эквивалентными.

Теорема 1. *Если $P_{\xi\eta}$ абсолютно непрерывно относительно $P_\xi P_\eta$, то*

$$J_2(\xi,\ \eta) = \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} \alpha\ (x,\ y) \log \alpha\ (x,\ y)\, P_\xi\,(dx)\, P_\eta\,(dy) \tag{7}$$

и, следовательно, всегда имеет место равенство

$$J_1(\xi,\ \eta) = J_2(\xi,\ \eta). \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть*

1) *мера $P_{\xi\eta}$ абсолютно непрерывна относительно меры $P_\xi P_\eta$ и*

2) *σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей все интервалы. Тогда*

$$J_3(\xi,\ \eta) = \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} \alpha\ (x,\ y) \log \alpha\ (x,\ y)\, P_\xi\,(dx)\, P_\eta\,(dy) \tag{9}$$

и, следовательно,

$$J_1(\xi,\ \eta) = J_2(\xi,\ \eta) = J_3(\xi,\ \eta). \tag{10}$$

Следствие. *В случае, когда распределения $P_\xi\,(dx)$, $P_\eta\,(dy)$, $P_{\xi\eta}\,(dxdy)$ задаются плотностями $p_\xi(x)$; $p_\eta(y)$ и $p_{\xi\eta}(x,\ y)$, имеем*

$$J_1(\xi,\ \eta) = J_2(\xi,\ \eta) = J_3(\xi,\ \eta) = \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} p_{\xi\eta}\ (x,\ y) \log \frac{p_{\xi\eta}\ (x,\ y)}{p_\xi\,(x)\, p_\eta\,(y)}\, dxdy^*. \tag{11}$$

Для доказательства наших теорем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если условие теоремы 1 выполнено, то существуют множества $I_n \in \mathfrak{B}$ $I_n \in \mathfrak{B}$, $n = 1, 2, \ldots$ такие, что функция $\alpha\ (x,\ y)$ равна почти всюду некоторой функции $\alpha_1\ (x,\ y)$, измеримой относительно минимальной σ-алгебры $\mathfrak{F}\,(I_n \times J_n;\ n = 1, 2, \ldots)$, содержащей все $I_n \times J_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Лемма 2. *Если все условия теоремы 2 выполнены, то существуют интервалы W_n и T_n, $n = 1, 2, \ldots$ такие, что функция $\alpha\ (x,\ y)$ равна почти всюду, некоторой функции $\alpha_2\ (x,\ y)$, измеримой относительно минимальной σ-алгебры $\mathfrak{F}\,(W_n \times S_n;\ n = 1, 2, \ldots)$, содержащей все $W_n \times T_n$, $n = 1, 2, \ldots$*

Леммы 1 и 2 следуют из одной теоремы теории меры (см., например, книгу Дуба [3]. Дополнение, теорема 2. 4).

Переходим теперь к доказательству теоремы 1. По лемме 1 мы можем считать функцию $\alpha\ (x,\ y)$ измеримой (относительно $\mathfrak{F}\,(I_n \times J_n;\ n = 1, 2, \ldots)$) функцией. Теперь для каждого n, пространство $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ можно представить в виде суммы

$$\mathfrak{E} \times \mathfrak{E} = \left(\sum_{i=1}^{\rho_n} Q_i^{(n)}\right)\left(\sum_{k=1}^{\sigma_n} R_k^{(n)}\right), \tag{12}$$

* Это и есть формула Шеннона [2].

где $Q_i^{(n)}\,(1\leqslant i\leqslant \rho_n)$ и $R_k^{(n)}\,(1\leqslant k\leqslant \sigma_n)$ — образуют два разбиения пространства $\mathfrak{E}$ на непересекающихся множествах из σ-алгебры $\mathfrak{B}$, причем каждое $I_k\times J_k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ является суммой некоторых множеств вида $Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)}$ $(1\leqslant i\leqslant \rho_n,\ 1\leqslant k\leqslant \sigma_n)$ и каждое $Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)}$ является подмножеством некоторого множества вида $Q_i^{(n-1)}\times R_k^{(n-1)}$ $(1\leqslant i\leqslant \rho_{n-1},\ 1\leqslant k\leqslant \sigma_{n-1})$. Обозначим $\mathfrak{F}_n$ минимальную σ-алгебру, содержащую все множества $Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)}\,(1\leqslant i\leqslant \rho_n,\ 1\leqslant k\leqslant \sigma_n)$. Очевидно, что

1) $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2\subseteq\cdots$

2) $\mathfrak{F}_n\supseteq\mathfrak{F}\,(I_k\times J_k,\ k=1,2,\ldots n)$

3) $\mathfrak{F}_\infty=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_n\supseteq\mathfrak{F}\,(I_k\times J_k;\ k=1,2,\ldots)$

4) Функция $\alpha(x,y)$ — измерима относительно $\mathfrak{F}_\infty$. Определим функцию $\alpha_n(x,y)$ следующим образом:

$$\alpha_n(x,y)=\begin{cases}\dfrac{P_{\xi\eta}(Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)})}{P_\xi(Q_i^{(n)})\,P_\eta(R_k^{(n)})}, & \text{при } P_\xi(Q_i^{(n)})\,P_\eta(R_k^{(n)})\neq 0 \text{ и } (x,y)\in Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)},\\ 0, & \text{при } P_\xi(Q_i^{(n)})\,P_\eta(R_k^{(n)})=0 \text{ и } (x,y)\in Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)}.\end{cases}\tag{13}$$

Легко видеть, что

$$E\{\alpha(x,y)\mid\mathfrak{F}_n\}=\alpha_n(x,y).\tag{14}$$

Согласно одной теореме Дуба ([3] § 8 глава VII), $\alpha_1(x,y),\ \alpha_2(x,y),\ldots,\alpha(x,y)$ образуют мартингал, причем имеет место (почти всюду относительно меры $P_\xi P_\eta$) равенство

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x,y)=\alpha(x,y).\tag{15}$$

Следовательно, величины $[\alpha_1(x,y)\log\alpha_1(x,y)]^+$, $[\alpha_2(x,y)\log\alpha_2(x,y)]^+$ *, ... образуют полумартингал. Если

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}}\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)\,P_\xi(dx)\,P_\eta(dy)<\infty,\tag{16}$$

то величины $[\alpha_1(x,y)\log\alpha_1(x,y)]^+$, $[\alpha_2(x,y)\log\alpha_2(x,y)]^+,\ldots,[\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)]^+$ также образуют полумартингал. Отсюда находим, что в нашем случае величины $[\alpha_n(x,y)\log\alpha_n(x,y)]^+$ $n=1,2,\ldots$ равномерно интегрируемы. Заметив, что функция $z\log z\,(z\geqslant 0)$ ограничена снизу, мы убеждаемся в том, что величины $\alpha_n(x,y)\log\alpha_n(x,y)$, $n=1,2,\ldots$ равномерно интегрируемы. В силу одной теоремы теории меры имеем

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}}\alpha_n(x,y)\log\alpha_n(x,y)\,P_\xi(dx)\,P_\eta(dy)=\iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}}\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)\,P_\xi(dx)\,P_\eta(dy),\tag{17}$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\rho_n}\sum_{k=1}^{\sigma_n}P_{\xi\eta}(Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)})\log\frac{P_{\xi\eta}(Q_i^{(n)}\times R_k^{(n)})}{P_\xi(Q_i^{(n)})\,P_\eta(R_k^{(n)})}=$$

$$=\iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}}\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)\,P_\xi(dx)\,P_\eta(dy).\tag{18}$$

---

* $[\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)]^+=\dfrac{|\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)|+\alpha(x,y)\log\alpha(x,y)}{2}$.

Это означает, что

$$J_2(\xi,\ \eta) = \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} \alpha(x, y) \log \alpha(x, y)\, P_\xi(dx)\, P_\eta(dy). \tag{19}$$

Если

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} \alpha(x, y) \log \alpha(x, y)\, P_\xi(dx)\, P_\eta(dy) = +\infty, \tag{20}$$

то,

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}\mathfrak{E}} [\alpha(x, y) \log \alpha(x, y)]^+ P_\xi(dx)\, P_\eta(dy) = +\infty. \tag{21}$$

Отсюда, по лемме Фату, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} [\alpha_n(x, y) \log \alpha_n(x, y)]^+ P_\xi(dx)\, P_\eta(dy) = +\infty \tag{22}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} \alpha_n(x, y) \log \alpha_n(x, y)\, P_\xi(dx)\, P_\eta(dy) = +\infty, \tag{23}$$

т. е.

$$J_2(\xi, \eta) = +\infty. \tag{24}$$

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1 (только вместо леммы 1 надо воспользоваться леммой 2).

Поступила в редакцию
16. 10. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции, Успехи матем. наук, XII, 1 (73), (1957), 3—52.
[2] C. E. Shannon, W. Weaver, The mathematical theory of communications, (1949).
[3] J. L. Doob, Stochastic processes, New York (1953).

A REMARK ON DEFINING THE QUANTITY OF INFORMATION

CHIANG TSE-PEI *(MOSCOW)*

(Summary)

Let ξ, η be real-valued random variables. Let the probability distributions of ξ, η and their joint probability distributions be denoted by P_ξ, P_η and $P_{\xi\eta}$, respectively, i. e. P_ξ and P_η are probability measures defined on certain σ-algebras $\mathfrak{B}$ of subsets of real line $\mathfrak{E}$, while $P_{\xi\eta}$ is a probability measure defined on the σ-algebra $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$.

The quantity of information $J_1(\xi, \eta)$ included in the random variable ξ with respec to the random variable η is defined to be $\sup \sum_{i=1}^{n} P_{\xi\eta}(S_i) \log \frac{P_{\xi\eta}(S_i)}{P_\xi P_\eta(S_i)}$, for all possible modes of divisions of the space $\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}$ into a finite number of mutually disjoint sets $S_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ of $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$. Let $J_2(\xi, \eta)$ and $J_3(\xi, \eta)$ be the corresponding supremum when the sets S_i in the above definition are restricted to be generalized rectangles (i. e. $S_i = B\times B', BB' \in \mathfrak{B}$) or rectangles. The following theorem is proved:

Theorem. *Suppose that $\mathfrak{B}$ is the σ-algebra generated by all the intervals.* (1) *If the measure $P_{\xi\eta}$ is absolutely continuous with respect to the measure $P_\xi P_\eta$, then*

$$J_1(\xi, \eta) = J_2(\xi, \eta) = J_3(\xi, \eta) = \iint\limits_{\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}} \alpha(x, y) \log \alpha(x, y)\, P_\xi(dx)\, P_\eta(dy),$$

where $\alpha(x, y) = \dfrac{d^2 P_{\xi\eta}}{dP_\xi dP_\eta}$.

In case $P_{\xi\eta}$ is not absolutely continuous with respect to $P_\xi P_\eta$, we have

$$J_1(\xi, \eta) = J_2(\xi, \eta) = J_3(\xi, \eta) = +\infty.$$

Our result remains valid in the general case, when random variables ξ and η take values in abstract space.

ε-ЭНТРОПИЯ ДИСКРЕТНОГО СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕКТА

В. ЕРОХИН

1. Пусть некий случайный объект ξ имеет возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ и p_k есть вероятность того, что ξ совпадает с x_k. Обозначим ξ' произвольный случайный объект, способный принимать лишь те же значения, что и ξ. Если достаточно воспроизводить ξ не точно, но при помощи таких ξ', для которых совместное распределение вероятностей $P_{\xi\xi'}$, значений ξ и ξ' удовлетворяет некоторому условию W «близости» ξ и ξ', то, как показано в [1], роль энтропии $H(\xi)$ начинает играть «W-энтропия»

$$H_W(\xi) = \inf_{P_{\xi\xi'} \in W} J(\xi, \xi'), \tag{1}$$

где $J(\xi, \xi')$ — количество информации относительно ξ, содержащейся в ξ'. Понятие W-энтропии, абсолютно необходимое при обращении с непрерывно распределенными объектами, может оказаться интересным и для дискретных объектов, тем более, что для последних существуют специфические условия W, которые в непрерывном случае не уменьшили бы бесконечной неопределенности объекта. Именно, если кроме требования дискретности оставлять произвольной природу объекта ξ, то естественны следующие условия:

$$\mathbf{P}(\xi \neq \xi') \leqslant \varepsilon, \tag{W_ε^1}$$

$$\mathbf{P}(\xi \neq \xi' \mid \xi') \leqslant \varepsilon, \tag{W_ε^2}$$

где $0 < \varepsilon < 1$ *. Сразу видно, что $H_{W_\varepsilon^2}(\xi) \geqslant H_{W_\varepsilon^1}(\xi)$. Однако из указанного ниже (см. (9), (10)) экстремального распределения для случая (W_ε^1) следует, что на самом деле имеет место равенство

$$H_{W_\varepsilon^2}(\xi) = H_{W_\varepsilon^1}(\xi), \tag{2}$$

естественное, впрочем, если верить в реальный смысл входящих в него величин. Это общее значение обозначим как $H_\varepsilon(\xi)$ и назовем ε-энтропией дискретного объекта ξ.

Допустимые распределения вероятностей $P_{\xi\xi'}$, для которых нижняя грань в (1) (где $W = W_\varepsilon^1$) достигается, будем коротко называть «экономичными кодами». Цель

---

* Возможно еще условие $\mathbf{P}(\xi \neq \xi' \mid \xi) \leqslant \varepsilon$, однако реально оно мало интересно. Соответствующая энтропия вообще больше, чем $H_{W_\varepsilon^1}(\xi)$. Вывод явной формулы принципиально легок, но сама формула слишком громоздка, чтобы ее здесь выписывать.

настоящей заметки — дать явную формулу для $H_\varepsilon(\xi)$ и указать соответствующий экономичный код *.

Если число возможных значений ξ конечно (будем всюду ниже обозначать это число n), то экономичный код, очевидно, существует. Оказывается, он существует также и в случае счетного числа значений ξ, причем этот случай удается получить из конечного предельным переходом. При этом оказывается, что при всех достаточно больших n (когда $\theta(\xi_n) \geqslant \sum_{k \geqslant n} p_k$; см. (7)) имеем $H_\varepsilon(\xi) = H_\varepsilon(\xi_n)$; где $\xi_n = \xi$, если $\xi = x_k$ и $k \leqslant n$, и $\xi_n = x_{n+1}$, если $\xi = x_k$ и $k > n$. В связи со сказанным, намечаемое в п°3 доказательство относится к случаю конечного числа возможных значений ξ. Однако формулировка результата в п° 1 относится к общему случаю, и конечное число значений предполагается лишь там, где явно входит n.

2. Нам удобно выделить случай $H_\varepsilon(\xi) = 0$. Можно показать, что этот случай наступает тогда и только тогда, когда $\max\{p_k\} \geqslant 1 - \varepsilon$. Поэтому всюду ниже мы будем предполагать, что

$$p_k < 1 - \varepsilon_r. \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

Перенумеруем, если надо, возможные значения x_k таким образом, чтобы вероятности p_k не возрастали с увеличением k. Пусть при этом

$$p_1 = \cdots = p_{n_1} > p_{n_1+1} = \cdots = p_{n_2} > \cdots > p_{n_{r-1}+1} = \cdots = p_{n_r} > \cdots. \tag{4}$$

Для всякого θ, $0 < \theta < p_1$ положим

$$s(\theta) = \sum_{p_k > \theta} p_k, \tag{5}$$

$$n(\theta) = \sum_{p_k > \theta} 1. \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение (относительно θ)

$$\theta\,[n(\theta) - 1] = s(\theta) + \varepsilon - 1. \tag{7}$$

Оказывается, уравнение (7) всегда имеет решение и притом единственное. В дальнейшем будем обозначать θ именно это решение. Можно показать, что θ, как функция ε, непрерывна и монотонно возрастает. Можно также заметить, что $\theta = \dfrac{\varepsilon}{n-1}$, если только $\varepsilon \leqslant (n-1)\,p_n$.

Переходим непосредственно к сообщению результата. Положим

$$p_k^* = \begin{cases} p_k - \theta, & p_k > \theta \\ 0, & p_k \leqslant \theta \end{cases} \tag{8}$$

$$q_k = p_k^* \Big/ \sum_k p_k^*.$$

Очевидно $q_k \geqslant 0$ и $\sum_k q_k = 1$.

Рассмотрим случайный объект ξ', принимающий значение x_l с вероятностью q_l $(l = 1, 2, \ldots, n(\theta))$. Совместное распределение вероятностей значений ξ и ξ' определим формулой

$$\mathbf{P}(\xi = x_k,\ \xi' = x_l) = p_k^* \delta_{kl} + (p_k - p_k^*)\,q_l, \tag{9}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера. При этом из (7), (8) и (9) следует

$$\mathbf{P}(\xi = x_k,\ \xi' = x_k) = (1 - \varepsilon)\,q_k, \tag{10}$$

* Вопрос о явной формуле для $H_\varepsilon(\xi)$ был поставлен А. Н. Колмогоровым в руководимом им семинаре по теории информации.

т. е. код (9) таков, что одновременно

$$\mathbf{P}(\xi \neq \xi') \leqslant \varepsilon \text{ и } \mathbf{P}(\xi \neq \xi' \mid \xi' = x_l) = \varepsilon.$$

Я утверждаю, что $H_\varepsilon(\xi) = J(\xi, \xi')$, или в явном виде

$$H_\varepsilon(\xi) = \sum_{p_k > \theta} p_k \log \frac{1}{p_k} - [n(\theta) - 1]\,\theta \log \frac{1}{\theta} - (1-\varepsilon)\log \frac{1}{1-\varepsilon}. \tag{11}$$

Отметим, наконец, всегда справедливое неравенство ($n \geqslant 2$)

$$H_\varepsilon(\xi) \geqslant H(\xi) - \varepsilon \log \frac{n-1}{\varepsilon} - (1-\varepsilon)\log \frac{1}{1-\varepsilon}, \tag{12}$$

переходящее в равенство, когда $\varepsilon \leqslant (n-1)\,p_n$.

3. Нам остается наметить вкратце доказательство сообщенного результата. Мы отправляемся от следующей леммы.

Лемма 1. *Если* $\varepsilon > 0$, *то экономичный код (для условия* W_ε^1*) следует искать среди таких распределений пары* (ξ, ξ'), *для которых событие* $(\xi = x_k,\ \xi' = x_l)$ *может быть невозможным лишь в том случае, когда невозможно событие* $(\xi' = x_l)$ $(k = 1, 2 \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, n)$.

Утверждение леммы становится понятным, если обратиться к равенству

$$I(\xi, \xi') = H(\xi) - \mathbf{M}H(\xi \mid \xi'),$$

из которого ясно, что надо стараться сделать побольше условные энтропии $H(\xi \mid \xi' = x_l)$ (предполагается, что ξ' уже найдено).

Пусть матрица $\|r_{kl}\|$ есть матрица вероятностей экономичного кода. Ввиду леммы 1, мы можем предположить, что $r_{kl} > 0$ всякий раз, когда $q_l = \mathbf{P}(\xi' = x_l) = \sum_k r_{kl} > 0$.

Проварьируем в формуле

$$I(\xi, \xi') = H(\xi) - \sum_l q_l \log q_l + \sum_k \sum_l r_{kl} \log r_{kl}$$

только те r_{kl}, которые не равны нулю, сохраняя при этом неизменными суммы $\sum_l r_{kl} = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $\sum_k r_{kk}$. Мы можем, конечно, воспользоваться дифференцированием и методом множителей Лагранжа. Получим

$$r_{kl} = \alpha_k q_l \ (k \neq l),\quad r_{kk} = \alpha_0 \alpha_k q_k, \tag{13}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа, которые еще надо определить. Очень важно, что в силу леммы 1 равенства (13) можно считать справедливыми для всех r_{kl}, а не только для $r_{kl} \neq 0$, для которых они выведены. Далее, пусть ξ' имеет $m \leqslant n$ возможных значений. Требования

$$\sum_l r_{kl} = p_k, \qquad \sum_k p_k = 1, \qquad \sum_k r_{kl} = q_l$$

и (3), предъявленные к (13), можно удовлетворить, только положив $\alpha_k = \text{const} = \theta$, если $q_k > 0$; $\alpha_k = p_k$, если $q_k = 0$;

$$\alpha_0 \theta = s - m\theta + \theta, \quad s = \sum_{q_k > 0} p_k; \quad q_k = (p_k - \theta)/(s - m\theta),$$

если только $q_k > 0$.

Мы должны кроме того потребовать, чтобы $\sum_k r_{kk} \geqslant 1-\varepsilon$ и $q_k \geqslant 0$. С учетом (3) это дает

$$0 \leqslant \theta \leqslant \min\left\{\min_{q_k>0}\{p_k\},\ \frac{s-1+\varepsilon}{m-1}\right\}. \tag{14}$$

Теперь можно подсчитать

$$I(\xi, \xi') = \sum_{q_k>0} p_k \log\frac{1}{p_k} - (m-1)\,\theta \log\frac{1}{\theta} - (s-m\theta+\theta)\log\frac{1}{s-m\theta+\theta}. \tag{15}$$

Нам остается решить, какие из значений x_k следует считать возможными для ξ', и затем выбрать число θ, удовлетворяющее (14), так, чтобы величина (15) была возможно меньше.

Детальный анализ показывает, что возможные значения ξ' должны быть таковы, что

$$0 < \frac{s-1+\varepsilon}{m-1} < \min_{q_k>0}\{p_k\}. \tag{16}$$

При этом выгоднее всего положить

$$\theta = \frac{s-1+\varepsilon}{m-1}. \tag{17}$$

Дальнейшие старания направлены к доказательству следующей основной леммы.

Лемма 2. *Если* $H_\varepsilon(\xi) > 0$ (*т. е. имеет место* (3)), *то существует* (*см.* (4)) *единственный номер* $r \geqslant 1$ *такой, что*

$$p_{n_{r+1}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n_r} p_k - 1 + \varepsilon}{n_r - 1} < p_{n_r}. \tag{18}$$

Возможными значениями для ξ' надо объявить значения $x_1, x_2, \ldots, x_{n_r}$.

При доказательстве наряду с элементарными подсчетами приходится по существу пользоваться неравенством Иенсена для выпуклых функций (в применении к $-x\log x$).

Сводя вместе все сказанное, легко получаем ту форму результата, в которой он описан в п°2. Неравенство (12) можно заметить при доказательстве леммы 2 или же получить посредством прямой оценки средней условной энтропии $\mathbf{M}H(\xi \mid \xi')$ при помощи неравенства Иенсена.

Поступила в редакцию
18.11.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Теория передачи информации, Материалы сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства, М., 1956.

ε-ENTROPY OF A DISCRETE RANDOM VARIABLE

V. EROHIN (MOSCOW)

(*Summary*)

Let ξ be random variable which takes on (abstract) values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ with probabilities $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ($\Sigma p_k = 1$); ξ' denotes another random variable with

$$q_k = \mathbf{P}(\xi' = x_k) \geqslant 0, \quad \sum q_k = 1$$

and

$$\mathbf{P}(\xi' \neq \xi) \leqslant \varepsilon, \tag{W_ε^1}$$

or

$$\mathbf{P}(\xi' \neq \xi \mid \xi') \leqslant \varepsilon. \qquad (W_\varepsilon^2)$$

Let

$$H_{W_\varepsilon^i}(\xi) = \inf_{\xi' \in W_\varepsilon^i} J(\xi, \xi'), \ (i = 1, 2), \qquad (1)$$

where J is the amount of information about ξ contained in ξ'. It is shown that $H_{W_\varepsilon^1}(\xi)$ and $H_{W_\varepsilon^2}(\xi)$ are equal.

The paper gives the precise formula for their common value $H_\varepsilon(\xi)$ as well as for distributions $P_{\xi\xi'}$ for which the infimum in (1) is attained.

МНОГОМЕРНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

В. РИХТЕР

1. Аналогично теоремам, доказанным в заметке автора [1], в многомерном случае имеют место следующие локальные теоремы.

Пусть задана последовательность $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ независимых одинаково распределенных m-мерных случайных векторов с общей функцией распределения $V(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in R_m$. Пусть существуют все смешанные вторые моменты вектора $X^{(1)}$, $\sigma^{kj} = \mathbf{E}(X_k^{(1)} - \mathbf{E}X_k^{(1)})(X_j^{(1)} - \mathbf{E}X_j^{(1)})$, $\mathfrak{B}_2 = \|\sigma^{kj}\|$. Предположим, что $\Delta = \det \mathfrak{B}_2 \neq 0$. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{x} = (x_j)$, $\mathfrak{v} = (v_j)$, $\mathfrak{t} = (t_j) \ldots$ m-мерные векторы (строки), $\mathfrak{o} = (0, \ldots, 0)$; $|\mathfrak{x}|$ — длина вектора $\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{t} = dt_1 \ldots dt_m$, $\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{x} \rangle = \sum_{j=1}^{m} v_j k_j$—скалярное произведение векторов $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{x}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X^{(j)} = \mathfrak{o}$, $Z_n = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X^{(j)}}{\sqrt{n}}$ *и пусть выполнены следующие условия:*

(A) *существует натуральное число* n_0 *такое, что* Z_{n_0} *имеет ограниченную плотность* $p_{Z_{n_0}}(\mathfrak{x})$, (B) *существует положительное* α *такое, что для всех* m*-мерных векторов* $\mathfrak{v} \in R_m$, $|v_j| < \alpha$, *сходится интеграл*

$$\int_{R_m} e^{\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{x} \rangle} dV(\mathfrak{x}).$$

Тогда для достаточно большого n *имеет место формула обращения* *, *и если* $|x_j| > 1$ *и* $|x_j| = o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$; $j = 1, 2, \ldots, m$, *то имеет место соотношение*

$$\frac{p_{Z_n}(\mathfrak{x})}{\varphi(\mathfrak{x})} = \exp\left[n \sum_{k=3}^{\infty} Q_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{|\mathfrak{x}|}{\sqrt{n}}\right)\right]. \qquad (1)$$

---

* См. ниже соотношение (4).

Здесь $\varphi(\mathfrak{x})$ *обозначает плотность* m*-мерного собственного нормального распределения*

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{x}'}}{[2\pi]^{\frac{m}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}}, \tag{2}$$

$Q_x(\mathfrak{x})$ *— полилинейная форма* k*-той степени, коэффициенты которой однозначно определяются по заданному закону* $V(\mathfrak{x})$. *Ряд* $\sum Q_k(\mathfrak{v})$ *сходится для всех* $\mathfrak{v}$ *достаточно малой длины.*

В случае решетчатых случайных векторов имеет место

Теорема 2. *Предположим для простоты, что* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *могут принимать только целочисленные значения* $\mathfrak{k}$ *(векторы из* R_m *с целочисленными координатами).*

Пусть $p(\mathfrak{k}) = \mathbf{P}\{X^{(j)} = \mathfrak{k}\}$ *и* $P_n(\mathfrak{k}) = \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} X^{(j)} = \mathfrak{k}\right\}$ *и пусть выполнены следующие условия:*

(A) *распределение векторов* $X^{(j)}$ *однорешетчатое, т. е. общий наибольший делитель объемов* m*-мерных симплексов, все* $m+1$ *вершин которых лежат в целочисленных точках* $\mathfrak{k}$, *для которых* $p(\mathfrak{k}) > 0$, *умноженных на* $m!$, *равен единице,* (B) *существует такое положительное* α, *что для всех* $\mathfrak{v}$, $|v_j| < \alpha$, *сходится ряд*

$$\sum_{\mathfrak{k}} p(\mathfrak{k})\, e^{\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{k}\rangle}.$$

Если положить $\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{k} - n\mathfrak{a}}{\sqrt{n}}$, $\mathfrak{a} = \mathbf{E}X^{(1)}$, *и если* $|x_j| > 1$, $|x_j| = o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$; $j = 1, 2, \ldots, m$, *то имеет место соотношение*

$$\frac{n^{\frac{m}{2}} P_n(\mathfrak{k})}{\varphi(\mathfrak{x})} = \exp\left[n \sum_{k=3}^{\infty} Q_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{|\mathfrak{x}|}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{3}$$

где $\varphi(\mathfrak{x})$ *и* $Q_k(\mathfrak{x})$ *такие же, что и в теореме 1.*

2. Доказательство теоремы 1.

Исходим из следующей формулы обращения

$$p_{z_n}(\mathfrak{x}) = \frac{n^{\frac{m}{2}}}{[2\pi i]^m} \int_{\substack{c_j - i\infty \\ j=1,\ldots,m}}^{c_j + i\infty} \ldots \int e^{-\sqrt{n}\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle} M^n(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}, \tag{4}$$

где $|c_j| < \alpha$, $\mathfrak{c} = (c_j)$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + i\mathfrak{t}$, $-\infty < t_j < +\infty$; $= 1, 2, \ldots, m$ и $M(\mathfrak{z})$ — производящая функция моментов $X^{(1)}$,

$$M(\mathfrak{z}) = \int_{R_m} e^{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle} dV(\mathfrak{x}).$$

В силу условия (B) функция $M(\mathfrak{z})$ определена для всех $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + i\mathfrak{t}$, $|c_j| < \alpha$, $-\infty < t_j < +\infty$, и в силу условия (A) эта формула обращения (4) имеет место для всех $n \geqslant 2n_0$.

Заменим $\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}} = \mathfrak{v}$ и вычислим интеграл

$$I = \frac{n^{\frac{m}{2}}}{[2\pi i]^m} \int\limits_{\substack{c_j - i\infty \\ j=1,\ldots,m}}^{c_j + i\infty} \ldots \int M^n(\mathfrak{z})\, e^{-n\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{v}\rangle}\, d\mathfrak{z}. \tag{5}$$

$M(0) = 1$ и M непрерывна по $\mathfrak{z}$ в окрестности $\mathfrak{z} = 0$. Поэтому можно найти куб Γ с центром 0 и гранями, параллельными осям, внутри которого $|M(\mathfrak{z})| \geqslant \beta > 0$. Тогда в Γ можно образовать функцию $K(\mathfrak{z}) = \log M(\mathfrak{z})$ ($\log$ — главное значение логарифма).

Нам остается как можно удобнее выбрать вектор c в интеграле (5), который пока подчиняется только условию $|c_j| < \alpha$. По аналогии с методом перевала, использованным в работе [1] в одномерном случае, и в силу свойств функции $M(\mathfrak{z})$ достаточно решить уравнение «перевала»

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{z}} [\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{v}\rangle - K(\mathfrak{z})] = 0$$

или, что то же самое,

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{z}} K(\mathfrak{z}) \tag{6}$$

внутри куба Γ; достаточно ограничиться векторами $\mathfrak{z}$ с чисто вещественными координатами, так как $\mathfrak{v} \in R_m$.

Якобиан уравнения (6)

$$\Delta(\mathfrak{z}) = \frac{D\left(\frac{\partial}{\partial z_1} K(\mathfrak{z}), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m} K(\mathfrak{z})\right)}{D(z_1, \ldots, z_m)} = \det \| K''_{z_l z_j}(\mathfrak{z}) \|$$

непрерывен по $\mathfrak{z}$ и отличен от нуля в точке $\mathfrak{z} = 0$, $\Delta(0) = \Delta \neq 0$ по предположению. Поэтому $\Delta(\mathfrak{z}) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $\mathfrak{z} = 0$ и уравнение (6) однозначно обратимо для $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{v}$ с достаточно малыми координатами, $\mathfrak{z} = 0$ отвечает точке $\mathfrak{v} = 0$, для $\mathfrak{v}$ достаточно малой длины получаем вектор $\mathfrak{z}_0$ малой длины: $z_k^0 = \chi_k(\mathfrak{v})$.

Выбираем такое $\mathfrak{v}$, что $|z_j^0| < \alpha$. Тогда проводим путь интегрирования через точку $\mathfrak{z}_0$ и проинтегрируем вдоль $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + it$, $-\infty < t_j < +\infty$. Сколь угодно малая окрестность точки $\mathfrak{z}_0$ дает главную часть интеграла. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что вектор с координатами $z_j^0 \pm i\varepsilon$ лежит в Γ. Имеем

$$I = \frac{n^{\frac{m}{2}}}{[2\pi i]^m} \int\limits_{\substack{z_j^0 - i\varepsilon \\ j=1,2,\ldots,m}}^{z_j^0 + i\varepsilon} \ldots \int e^{n\{K(\mathfrak{z}) - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{v}\rangle\}} d\mathfrak{z} + I_R =$$

$$= \frac{n^{\frac{m}{2}}}{[2\pi]^m} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \ldots \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{n\{K(\mathfrak{z}_0 + it) - \langle \mathfrak{z}_0 + it, \mathfrak{v}\rangle\}}\, dt + I_R.$$

Разложим $K(\mathfrak{z}_0 + it) - \langle \mathfrak{z}_0 + it, \mathfrak{v}\rangle$ вдоль $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + it$ в ряд Тейлора по степеням координат t_j. Ряд сходится для всех t достаточно малой длины.

$$K(\mathfrak{z}_0 + it) - \langle \mathfrak{z}_0 + it, \mathfrak{v}\rangle = K(\mathfrak{z}_0) - \langle \mathfrak{z}_0, \mathfrak{v}\rangle + i[\langle t, \operatorname{grad} K(\mathfrak{z}_0) - \mathfrak{v}\rangle] -$$

$$- \sum_{k,\, j=1}^{m} t_k t_j \frac{K''_{z_k z_j}(\mathfrak{z}_0)}{2} - i \sum_{k,\, j,\, l=1}^{m} t_k t_j t_l \frac{K'''_{z_k z_j z_l}(\mathfrak{z}_0)}{3!} + \cdots$$

Выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю (см. уравнение перевала (6)). Получим

$$I = \frac{n^{\frac{m}{2}}}{[2\pi]^m} e^{n\{K(\mathfrak{z}_0) - \langle \mathfrak{z}_0, \mathfrak{v}\rangle\}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \ldots \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left[-\frac{n\overline{Q}_2(t)}{2} - in\frac{\overline{Q}_3(t)}{3!} + \cdots\right] dt + I_R.$$

Сделаем следующую замену переменных: $\sqrt{n}\,t=\tilde{t}$, $dt=n^{-\frac{m}{2}}\,d\tilde{t}$. Тогда

$$I=\frac{e^{n\{K(\lambda_0)-\langle\lambda_0,\,\mathfrak{v}\rangle\}}}{[2\pi]^m}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{+\varepsilon\sqrt{n}}\cdots\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{+\varepsilon\sqrt{n}}e^{-\frac{\overline{Q}_2(\tilde{t})}{2}}\times$$

$$\times\left\{1-\frac{i\overline{Q}_3(\tilde{t})}{3!\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\left[\frac{\overline{Q}_3(\tilde{t})}{3!}\right]^2+\cdots\right\}\left\{1+\frac{1}{n}\frac{\overline{Q}_4(\tilde{t})}{4!}+\ldots\right\}d\tilde{t}+I_R.$$

Здесь $\overline{Q}_2(t)=\sum\limits_{k,\,j=1}^{m}t_k t_j K''_{z_k z_j}(\lambda_0)$ положительно определенная квадратическая форма, определитель коэффициентов формы $\Delta(\lambda_0)$ больше нуля при нашем выборе λ_0; $\overline{Q_3}(t)=$ $=\sum\limits_{k,\,j,\,l=1}^{m}t_k t_l t_j K'''_{z_k z_j z_l}(\lambda_0)$; $\overline{Q_4}(t)$ определяется аналогично.

Конечные границы интегрирования можно заменить бесконечными, совершая при этом ошибку порядка $o(n^{-10})$. При интегрировании исчезают все члены с нечетным числом переменных, и остается вычислить

$$I=\frac{e^{n\{K(\lambda_0)-\langle\lambda_0,\,\mathfrak{v}\rangle\}}}{[2\pi]^m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}Q_2(t)}\left\{1+\frac{1}{n}\left[\frac{\overline{Q}_4(t)}{4!}-\frac{\overline{Q}_3^2(t)}{(3!)^2}\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}dt+I_R$$

$$=\frac{e^{n\{K(\lambda_0)-\langle\lambda_0,\,\mathfrak{v}\rangle\}}}{[2\pi]^{\frac{m}{2}}\,\Delta^{\frac{1}{2}}(\lambda_0)}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+I_R.$$

Функция $M^n(\lambda)$ при $n\geqslant 2n_0$ является производящей функцией моментов некоторого абсолютно непрерывного распределения. Поэтому для каждого $\varepsilon>0$ существует $\gamma>0$ такое, что для всех c, $|c_j|<\alpha$, и для всех t, $|t_j|\geqslant\varepsilon$, имеет место оценка

$$|M(\lambda)|<e^{-\gamma}M(c),\quad(\lambda=c+it).$$

Поэтому

$$|I_R|<e^{n\{K(\lambda_0)-\langle\lambda_0,\,\mathfrak{v}\rangle\}}\,n^{\frac{m}{2}}\,e^{-n\gamma\cdot\delta},$$

где $\delta>0$ — некоторая, постоянная,

$$|I_R|=e^{n\{K(\lambda_0)-\langle\lambda_0,\,\mathfrak{v}\rangle\}}\,o(n^{-r}),$$

r — сколь угодно большое число.

Рассмотрим

$$\frac{\Delta(\lambda_0)}{\Delta}=\frac{\det\|K_{z_k z_j}(\lambda_0)\|}{\det\|K''_{z_k z_j}(0)\|}.$$

$\Delta(\lambda_0)$ является положительной непрерывной функцией аргумента $\mathfrak{v}$ в окрестности от $\mathfrak{v}=0$, имеющей непрерывные производные по всем переменным v_j. Поэтому в хотя бы маленькой окрестности $\mathfrak{v}=0$ можно разложить $\Delta(\lambda_0)$ в ряд Тейлора по степеням v_j; $j=1,2,\ldots,m$; если потом образовать $\Delta^{-\frac{1}{2}}(\lambda_0)$, то соответствующий ряд тоже сходится в достаточно малой окрестности точки $\mathfrak{v}=0$:

$$\frac{\Delta(\lambda_0)}{\Delta}=1+\sum_{j=1}^{m}v_j b_j+o(|\mathfrak{v}|)$$

здесь b_j — некоторые постоянные. Следовательно,

$$\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\Delta^{\frac{1}{2}}(\lambda_0)} = 1 - \frac{1}{2}\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{b}\rangle + o(|\mathfrak{v}|).$$

Наконец,

$$I = \frac{e^{n\{K(\lambda_0) - \langle \lambda_0, \mathfrak{v}\rangle\}}}{[2\pi]^{\frac{m}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \frac{1}{2}\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{b}\rangle + O\left(\frac{1}{n}\right) + o(|\mathfrak{v}|)\right]$$

при $n \to \infty$, $|\mathfrak{v}| \to 0$.

Нам остается найти выражение для $K(\lambda_0) - \langle \lambda_0, \mathfrak{v}\rangle$ только в терминах $\mathfrak{v}$. Разложим $K(\lambda)$ в кубе Γ в ряд по степеням z_j:

$$K(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} \sigma^{jk} z_j z_k + \frac{1}{3!}\sum_{j,l,k=1}^{m} \gamma^{jlk} z_j z_l z_k + \dots,$$

$$\gamma^{jlk} = K^{m}_{z_j z_l z_k}(0), \dots, \gamma^{j_1 \dots j_n} = K^{(n)}_{z_{j_1} \dots z_{j_r}}(0), \dots$$

($\gamma^{j_1 \dots j_r}$ — семиинварианты r-го порядка распределения $V(\mathfrak{x})$). Тогда уравнение перевала (6) принимает вид

$$v_j = \sum_{k=1}^{m} z_k^0 \sigma^{kj} + \frac{1}{2}\sum_{k,l} z_k^0 z_l^0 \gamma^{klj} + \frac{1}{3!}\sum_{k,l,r} z_k^0 z_l^0 z_r^0 \gamma^{klrj} + \dots; \; j = 1, \dots, m \qquad (6')$$

Разложим функции $\chi_k(\mathfrak{v})$; $k = 1, 2, \dots, m$ в ряд Тейлора по степеням v_j:

$$z_k^0 = \chi_k(\mathfrak{v}) = \sum_{i=1}^{m} \beta^{jk} v_j + \frac{1}{2}\sum_{j,l} \beta^{jlk} v_j v_l + \frac{1}{3!}\sum_{j,l,r} \beta^{jlrk} v_j v_l v_r + \cdots$$

Тогда

$$z_k^0 z_l^0 = \sum_{j,n} \beta^{jk} \beta^{nl} v_j v_n + \frac{1}{2}\sum_{j,n,w} (\beta^{nwk}\beta^{jl} + \beta^{nwl}\beta^{jk}) v_n v_w v_j + \dots$$

и т. д. Если мы подставим эти выражения в ряд (6'), то получим

$$v_j \equiv \sum_{l=1}^{m} v_l \sum_{k=1}^{m} \beta^{lk}\sigma^{kj} + \frac{1}{2}\sum_{l,r} v_l v_r \left[\sum_{k} \sigma^{kj}\beta^{lrk} + \sum_{k,w} \gamma^{kwj}\beta^{lk}\beta^{rw}\right] +$$
$$+ \sum_{k',l',r'} v_{k'} v_{l'} v_{r'} \left[\frac{1}{6}\sum_{w} \beta^{k'l'r'w}\sigma^{wj} + \frac{1}{6}\sum_{k,l,r} \beta^{k'k}\beta^{l'l}\beta^{r'r}\gamma^{klrj} +$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{k,l} \gamma^{klj}\{\beta^{k'l'r}\beta^{r'l} + \beta^{k'l'l}\beta^{r'k}\}\right] + \cdots; \; j = 1, 2, \dots m.$$

Сравнением коэффициентов при v_j и их произведениях на правой и на левой стороне можно получить выражения для неизвестных коэффициентов β^{kj}, β^{klj}, ...

При v_j сравнение коэффициентов дает уравнения

$$\delta_{jl} = \sum_{k=1}^{m} \beta^{lk}\sigma^{kj}, \quad \text{где} \quad \delta_{jl} = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l, \end{cases}$$

т. е.

$$\|\beta^{lk}\| = \|\sigma^{lk}\|^{-1}.$$

При сравнении коэффициентов у $v_r\, v_k$ получим систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma^{kj}\, \beta^{lrk} + \sum_{k',w=1}^{m} \gamma^{k'wj}\, \beta^{lk'}\, \beta^{rw} = 0$$

относительно β^{lrk} и т. д. Поэтому

$$K(\mathfrak{z}_0) - \langle \mathfrak{z}_0, \mathfrak{v} \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{k,\, j=1}^{m} \sigma^{jk} z_j^0 z_k^0 - \frac{1}{3} \sum_{k,\, j,\, l=1}^{m} \gamma^{kjl} z_k^0\, z_j^0 z_l^0 - \dots$$

$$= -\frac{1}{2}\, \mathfrak{v} \mathfrak{B}^{-1}\, \mathfrak{v}' + Q_3(\mathfrak{v}) + Q_4(\mathfrak{v}) + \dots,$$

где $Q_k(\mathfrak{v})$ полилинейная форма k-той степени, коэффициены которой однозначно определяются семиинвариантами первых k порядков распределения $V(\mathfrak{x})$.

Ряд $\sum_{k=3}^{\infty} Q_k(\mathfrak{v})$ сходится для всех $\mathfrak{v}$ достаточно малой длины.

Наш интеграл I принимает тогда вид

$$I = \frac{e^{-\frac{n}{2}\, \mathfrak{v} \mathfrak{B}_2^{-1} \mathfrak{v}'}}{[2\pi]^{\frac{m}{2}}\, \Delta^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ n \sum_{k=3}^{\infty} Q_k^{(\mathfrak{v})} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O(|\mathfrak{v}|) \right] \right.$$

при $n \to \infty$, $|\mathfrak{v}| \to 0$.

Возвратимся к прежним переменным $\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\sqrt{n}$ и предположим, что $|x_j| > 1$, $|x_j| = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, тогда получим требуемый результат

$$p_{z_n}(\mathfrak{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\, \mathfrak{x} \mathfrak{B}_2^{-1} \mathfrak{x}'}}{[2\pi]^{\frac{m}{2}}\, \Delta^{\frac{1}{2}}} \exp\left[n \sum_{k=3}^{\infty} Q_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right) \right] \left[1 + O\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right) \right].$$

3. Доказательство теоремы 2. Многое можно без изменений перенести из предыдущего доказательства, поэтому остановимся только на особенностях решетчатого случая. Производящая функция моментов $X^{(j)}$

$$M(\mathfrak{z}) = \mathrm{E} e^{\langle \mathfrak{z},\, X^{(j)} \rangle} = \sum_{\mathfrak{k}} p(\mathfrak{k})\, e^{\langle \mathfrak{z},\, \mathfrak{k} \rangle}$$

существует в силу условия B в области $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + i\mathfrak{t}$, $|c_j| < \alpha$, $-\infty < t_j < +\infty$; $j = 1, \dots, m$.

Производящая функция суммы $\sum_{j=1}^{n} X^{(j)}$ равна

$$M^n(\mathfrak{z}) = \sum_{\mathfrak{k}} P_n(\mathfrak{k})\, e^{\langle \mathfrak{z},\, \mathfrak{k} \rangle}$$

Умножение обеих сторон на $e^{-\langle \mathfrak{z},\, \widetilde{\mathfrak{k}} \rangle}$ и интегрирование вдоль $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + i\mathfrak{t}$, $-\pi \leqslant t_j \leqslant +\pi$, дает

$$P_n(\widetilde{\mathfrak{k}}) = \frac{1}{[2\pi i]^m} \int_{\substack{c_j - i\pi \\ j=1,\dots,m}}^{c_j + i\pi} \dots \int M^n(\mathfrak{z})\, e^{-\langle \mathfrak{z},\, \widetilde{\mathfrak{k}} \rangle}\, d\mathfrak{z}.$$

Положим $\mathfrak{x} = \dfrac{\mathfrak{k} - n\mathfrak{a}}{\sqrt{n}}$ (это — значения, принимаемые суммой $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} X^{(j)} - n\mathfrak{a}}{\sqrt{n}}$),

$\mathfrak{k} = \mathfrak{x}\sqrt{n} + n\mathfrak{a}$. Получим

$$P_n(\mathfrak{k}) = \frac{1}{[2\pi i]^m} \int_{\substack{c_j - i\pi \\ j=1,\ldots,m}}^{\substack{c_j + i\pi \\ \cdots}} M^n(\mathfrak{z})\, e^{-\sqrt{n}\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle - n\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{v}\rangle}\, d\mathfrak{z} \quad (\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + i\mathfrak{t})$$

Если положить $\widetilde{M}(\mathfrak{z}) = M(\mathfrak{z})\, e^{-\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{a}\rangle}$, то можно использовать все вычисления и разложения в ряд из предыдущего доказательства, где предполагалось $\mathrm{E}X^{(j)} = 0$.

Заменим $\dfrac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}} = \mathfrak{v}$ и вычислим интеграл

$$I = \frac{1}{[2\pi i]^m} \int_{\substack{c_j - i\pi \\ j=1,\ldots,m}}^{\substack{c_j + i\pi \\ \cdots}} \widetilde{M}^n(\mathfrak{z})\, e^{-n\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{v}\rangle}\, d\mathfrak{z}.$$

Так как $\widetilde{M}(0) = 1$ и $\widetilde{M}$ непрерывна по $\mathfrak{z}$, то существует куб Γ с центром в начале и с гранями, параллельными осям, внутри которого $|\widetilde{M}(\mathfrak{z})| \geqslant \beta > 0$. Там же можно рассматривать $K(\mathfrak{z}) = \log \widetilde{M}(\mathfrak{z})$. Следуя предыдущему доказательству, можно найти точку «перевала» $\mathfrak{z}_0$ как решение уравнения

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{z}} K(\mathfrak{z})$$

и получить для главной части интеграла I оценку

$$I_0 = \frac{1}{[2\pi i]^m} \int_{\substack{z_j^0 - i\varepsilon \\ j=1,\ldots,m}}^{\substack{z_j^0 + i\varepsilon \\ \cdots}} \widetilde{M}^n(\mathfrak{z})\, e^{-n\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{v}\rangle}\, d\mathfrak{z} = \frac{e^{-\frac{n}{2}\mathfrak{v}\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{v}'}}{[2\pi]^{m/2}\, n^{m/2}\, \Delta^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\{nQ_3(\mathfrak{v}) + nQ_4(\mathfrak{v}) + \ldots\} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O(|\mathfrak{v}|)\right]$$

при $n \to \infty$, $|\mathfrak{v}| \to 0$.

По условию (A) распределение векторов $X^{(j)}$ однорешетчатое. Это значит, что в области $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + i\mathfrak{t}$, $-2\pi < t_j < 2\pi$; $j = 1, 2, \ldots, m$, модуль производящей функции $\widetilde{M}(\mathfrak{z})$ достигает своего максимума $\widetilde{M}(\mathfrak{c})$ только в точке $\mathfrak{c}$ (см. [2]). Поэтому при заданном $\mathfrak{z}_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \pi$) можно найти положительное γ такое, что

$$|\widetilde{M}(\mathfrak{z}_0 + i\mathfrak{t})| < \widetilde{M}(\mathfrak{z}_0)\, e^{-\gamma}$$

для $\varepsilon \leqslant |t_j| \leqslant \pi$; $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда для остающегося интеграла $I_R = I - I_0$,

$$I_R = \frac{1}{[2\pi]^m} \int_{\substack{\pi \geqslant |t_j| \geqslant \varepsilon \\ j=1,\ldots,m}} \cdots \int \widetilde{M}^n(\mathfrak{z}_0 + i\mathfrak{t})\, e^{-n\langle \mathfrak{z}_0 + i\mathfrak{t}, \mathfrak{v}\rangle}\, d\mathfrak{t}$$

имеем следующую оценку:

$$|I_R| < \widetilde{M}^n(\mathfrak{z}_0)\, e^{-n\langle \mathfrak{z}_0, \mathfrak{v}\rangle}\, e^{-n\gamma}.$$

Легко видеть, что прибавление I_R к главной части интеграла не изменяет данной оценки главной части. Возвращаясь к переменным $\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\sqrt{n}$ с надлежащими условиями

$|x_j|>1$, $|x_j| = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, получим требуемый результат:

$$P_n(\mathfrak{k}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{x}'}}{[2\pi n]^{m/2}\,\Delta^{1/2}} \exp\left[n\sum_{k=3}^{\infty} Q_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\mathfrak{k}$ целочисленный вектор, связанный с $\mathfrak{x}$ соотношением $\mathfrak{k} = \mathfrak{x}\sqrt{n} + n\mathfrak{a}$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
18.3.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее прим., 2, в. 2 (1957), 214—229.

[2] Е. Л. Рвачева, Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений, Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. мех. мат., 29 (1954), 5—44.

MEHRDIMENSIONALE LOKALE GRENZWERTSÄTZE FÜR GROSSE ABWEICHUNGEN

W. RICHTER (*LENINGRAD*)

(*Zusammenfassung*)

In Analogie zu den in [1] beweisenen Sätzen lassen sich im mehrdimensionalen Fall folgende lokale Sätze beweisen. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Zufallsvektoren $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots,$ der vorgegebenen Folge gleichverteilt sind, $V(\mathfrak{x}) = \mathrm{P}\{X_k^{(j)} < x_k;\ k = 1, 2, \ldots, m\};\ j = 1, 2, \ldots$ Es wird vorausgesetzt, daß alle gemischten zweiten Momente des Vektors $X^{(1)}$ endlich sind,

$$\det \|\sigma^{jk}\| = \Delta \neq 0.$$

Satz 1. Es sei $\mathrm{E}X^{(j)} = \mathfrak{o}$. Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

(A) Es existiere ein n_0 derart, daß $\sum_{j=1}^{n_0} X^{(j)}$ eine beschränkte Verteilungsdichte besitzt.

(B) Es existiere eine positive Zahl α derart, daß für alle m-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{v}$, $|v_j| < \alpha$, das Integral $\int_{R_m} e^{\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{x}\rangle}\, dV(\mathfrak{x})$ konvergiert.

Dann gilt für genügend große n die Umkehrformel, und ist $|x_j| > 1$ und $|x_j| = o(\sqrt{n})$ für $n \to \infty$; $j = 1, 2, \ldots, m$, so gilt die Beziehung (1). Dabei ist $Q_k(\mathfrak{x})$ eine Polylinearform der Ordnung k, deren Koeffizienten durch die Semiinvarianten der ersten k Ordnungen der Verteilung $V(\mathfrak{x})$ eindeutig bestimmt sind.

Ein analoger Satz gilt für gitterförmig verteilte m-dimensionale Zufallsvektoren (**Satz 2**).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1958

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

А. Реньи, Исчисление вероятностей (A.Renyi, Valószinüsegszámitás), Tankónyvkiado, Budapest, 1954, 746 стр. (венгер.),

Среди большого числа учебников по теории вероятностей заслуживает внимания большая, хорошо методически построенная книга профессора А. Реньи. Помимо обычного материала, излагаемого в учебных руководствах, в ней изложены многие научные результаты последних лет и приведены многочисленные (свыше 500) задачи для самостоятельных упражнений.

Книга разбита на 16 глав: 1. Алгебра событий (21)*; 2. Вероятность (44); 3. Условная вероятность и независимость (38); 4. Распределение Пуассона (25); 5. Приближение биномиального распределения функцией Гаусса (34); 6. Случайные величины (42); 7. Распределение суммы независимых случайных величин и других функций от случайных величин (37); 8. Числовые характеристики случайных величин; средние (42); 9. Числовые характеристики случайных величин; дисперсия (44); 10. Элементы математической статистики (50); 11. Закон больших чисел (49); 12. Характеристические функции (66); 13. Предельные распределения теории вероятностей (29); 14. Цепи Маркова (48); 15. Теория упорядоченных выборок (33); 16. Стохастические процессы (37).

Помимо основного материала имеются четыре дополнения: 1. Представление алгебры событий телом множеств (4), 2. Некоторые вспомогательные сведения из теории множеств и теории меры (9), 3. Новое аксиоматическое построение теории вероятностей (6), 4. Краткий обзор истории теории вероятностей (19). Именной и предметный указатели дают возможность удобно использовать материал книги для справок. Таблицы разбросаны по всей книге. А именно, в конце главы 3 помещены таблицы биномиальных коэффициентов (до $n = 30$); главы 4—таблицы закона Пуассона (пятизначные), главы 5 — таблицы нормального распределения (четырехзначные) и таблица факториалов и логарифмов факториалов (до $n = 50$), в конце главы 10 — распределение Стьюдента, после 13-й главы—таблица распределения χ^2 (трехзначная), после 15-й главы приведены таблицы распределений Колмогорова и некоторых других. В конце книги приведены ответы на предложенные задачи.

Исходным пунктом при изложении понятия вероятности является наблюдение устойчивости частоты во многих явлениях. Кратко характеризуются различные идеи, позволяющие формализовать понятие вероятности. Мелким шрифтом дается критика основных положений Мизеса. Далее излагается аксиоматика теории вероятностей, предложенная А. Н. Колмогоровым. На этой последней базе основывается изложение всех остальных глав книги.

При изложении нормального приближения к биномиальному распределению особое внимание обращается на изучение быстроты сходимости.

Понятие случайной величины и числовых характеристик случайных величин вводится и излагается приблизительно так, как это делается в общепринятых советских учебниках. Одновременно с изложением одномерного случая дается представление и о многомерном случае. Вводимые понятия и выводимые формулы богато иллюстрируются подробно разобранными примерами.

В главе 10 рассмотрены постановки основных задач математической статистики и подходы к их решению на примере оценки параметров нормального распределения.

* В скобках после названия главы указывается число отведенных на нее страниц.

Дано понятие о подходе, основанном на формулах Байеса, а также представление о доверительных оценках.

Глава «Закон больших чисел» содержит, помимо классической теоремы Чебышева для независимых слагаемых, теорему Хинчина для одинаково распределенных слагаемых, теорему С. Н. Бернштейна относительно связных случайных величин, известные уточненные неравенства С. Н. Бернштейна. При изложении усиленного закона больших чисел автор придерживается системы, предложенной А. Н. Колмогоровым. С этой целью вначале доказывается известное неравенство Колмогорова, а затем достаточные условия, найденные им же. Далее доказывается теорема В. И. Гливенко о сходимости с вероятностью единица эмпирического распределения к истинному и дается представление о законе повторного логарифма.

В главе 12 излагаются элементарные свойства характеристических функций, теорема единственности и предельные теоремы, доказывается известное характеристическое свойство нормального распределения, указанное С. Н. Бернштейном, а также теорема Г. Крамера. Далее дается беглое изложение теории характеристических функций многомерных распределений и даются основы теории производящих функций.

Характеристические функции использованы для доказательства теоремы Ляпунова, локальной теоремы в случае одинаково распределенных слагаемых, распределения χ^2, условий сходимости к распределению Пуассона.

Цепи Маркова занимают в книге довольно значительное место. Помимо элементарных соотношений для переходных вероятностей и эргодической теоремы для цепей с конечным числом состояний, автор рассмотрел случай цепей со счетным множеством состояний, а также последовательности случайных величин, связанных цепной зависимостью.

Теория упорядоченных выборок, начавшая в последние годы играть в статистике все более и более значительную роль, нашла отражение в книге. Естественно, что в учебную книгу могли войти лишь немногие результаты, известные в этой обширной области исследований. Автор ограничился доказательством теорем, касающихся распределений максимальных отклонений эмпирических распределений от истинного. Ряд приведенных теорем, а также метод доказательства принадлежат автору книги. Поскольку этот метод состоит в использовании результатов главы, посвященной цепям Маркова, последовательность этих двух глав совершенно естественна.

Теория случайных процессов представлена только элементами теории марковских процессов. Рассмотрен процесс Пуассона и получены формулы Эрланга, выведены уравнения Колмогорова. О стационарных процессах не дается даже представления.

В добавлении 3 А. Реньи изложил предложенную им аксиоматику, основанную на рассмотрении условных вероятностей. Основы развитой им теории достаточно хорошо теперь известны из ряда статей и публичных выступлений автора.

В заключительном дополнении дан краткий, но весьма интересно и содержательно составленный очерк истории теории вероятностей. Специальный раздел этого очерка посвящен развитию теории вероятностей в Венгрии. Этот очерк обильно проиллюстрирован портретами крупнейших представителей нашей науки. К сожалению техническое выполнение иллюстраций не всегда удачно.

Приведенный в конце книги список книг и статей, рекомендуемых автором читателю, может служить хорошим руководством для самостоятельного чтения литературы, вводящей в основные задачи современной теории вероятностей.

Огромное число подробно рассмотренных в тексте примеров значительно увеличивают объем книги, но в то же время сильно облегчают ее чтение и прекрасно вводят в мир идей и постановок задач теории вероятностей, а также устанавливают связи теории вероятностей с другими научными дисциплинами. Нам кажется, что книга Реньи еще раз показывает, что нельзя раз и навсегда решить вопрос о том, каким должен быть учебник — кратким или объемистым. Это в конце концов не так существенно. Важно, чтобы он был хорошим. Этому последнему требованию книга Реньи удовлетворяет в достаточно полной мере: она заинтересовывает читателя, вводит его в разнообразные области теоретических и прикладных исследований современной теории вероятностей, заставляет работать мысль читателя и в то же время постоянно учитывает его научный уровень.

Б. В. Гнеденко

О. Ониеску, Г. Михок, Ч. Т. Ионеску Тульча, Теория вероятностей и ее приложения (O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionesku Tulcea, Calculul probabilităţilor şi aplicaţii), Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1956; 787 стр. (румынск.)

Учебная литература по теории вероятностей обогатилась еще одним фундаментальным руководством, дающим не только систематическое и достаточно далеко продвинутое изложение, но и знакомящим с разнообразными приложениями теории вероятностей. Конечно, при этом авторы не могли ставить перед собой задачу всестороннего охвата всех важнейших приложений теории вероятностей и ограничивались лишь теми из них, которые особенно близки их собственным научным интересам. Личные интересы авторов сказались не только на части книги, излагающей приложения теории вероятностей, но и на собственно математическом ее содержании. Для примера укажем, что всем специалистам в области теории вероятностей известен вклад, который внесли профессора Ониеску и Михок в теорию цепей Маркова. Это обстоятельство, несомненно, явилось причиной того, что в книге уделено значительное внимание изложению теории цепей и процессов Маркова, в то время как стационарным процессом представлено явно недостаточное место. Несомненно также, что интересы Ионеску Тульча сказались на том, что эргодические теоремы в книге освещены достаточно подробно и интересно. Отмеченное обстоятельство я хочу подчеркнуть не как недостаток, а как своеобразие книги.

Книга разбита на три части: 1. Поля вероятностей; 2. Стохастические процессы; 3. Приложения. В состав первой части входят 13 глав; второй — 7 и третьей — 9. В конце книги приложены таблицы, заимствованные, как указали авторы, из «Курса теории вероятностей» Б. В. Гнеденко. Библиография, содержащая 221 наименование, вводит читателя в значительную румынскую и мировую литературу по теории вероятностей. Алфавитный указатель совмещает предметный и именной указатели; он позволяет свободно ориентироваться в книге читателю, желающему быстро получить необходимую ему справку.

Чтобы у читателя составилось достаточно отчетливое представление о содержании и структуре книги, приведем ее оглавление, ограничиваясь при этом наименованием глав. В скобках после названия главы указывается число отведенных на нее страниц.

Часть 1. 1. Поле вероятностей, вероятность (14); 2. Конечные поля вероятностей (17); 3. Бесконечные поля вероятностей (27); 4. Случайные величины (16); 5. Последовательности и ряды случайных величин (15); 6. Средние значения (47); 7. Независимые случайные величины (15); 8. Характеристические функции; положительно определенные функции (39); 9. Последовательности событий, устойчивость, закон больших чисел (15); 10. Предельные законы; закон Гаусса (20); 11. Безгранично делимые законы распределения. Законы типа L (29); 12. Проблема моментов (18); 13. Эргодические теоремы (25).

Часть 2. 14. Цепи Маркова. Эргодическая проблема (11); 15. Проблема предельных распределений для случайных величин, связанных в цепь Маркова (59); 16. Общие стохастические процессы (20); 17. Случайные функции (30); 18. Эргодические свойства случайных процессов (18); 19. Аналитическое изучение непрерывных случайных процессов (51); 20. Механика случайного (Mecanici aleatoare) (23).

Часть 3. Использование теории вероятностей в статистической механике: 1. Специальные законы распределения в динамических системах (7); 2. Введение в классическую статистическую механику (36). Приложения теории вероятностей к математической статистике: 1. Распределения статистик (20); 2. Теория выборок (19); 3. Теория оценок (58). Приложение теории вероятностей к изучению демографических явлений и к страхованию: 1. Математическая теория смертности (25); 2. Математическая теория инвалидности (23); 3. Приложение теории смертности к теории страхования (31); 4. Схема Таукера и ее обобщение (13). Приложение теории вероятностей к звездной статистике (6). Таблицы (10). Библиография (6). Алфавитный указатель (3).

В конце большинства глав помещены задачи для самостоятельного решения (всего 124).

Авторы придерживаются теоретико-множественной системы изложения, строго выдерживая ее и в обозначениях. Изложение дедуктивное. Примеры прикладного

характера в начальных главах не играют заметной роли и во всяком случае они не служат отправным пунктом для построения новых понятий. Понятия случайного события вероятности, случайной величины вводятся в рассмотрение в соответствии с известной книгой А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей». Примеров, которые связали бы эти абстрактно вводимые понятия с реальными явлениями и развили бы теоретико-вероятностную интуицию читателя, в первых главах нет. Это обстоятельство наводит на мысль, что авторы предполагают предварительное знакомство читателя с пропедевтическим курсом теории вероятностей, написанным с позиций естествоиспытателя. Кстати сказать такого рода книга на румынском языке имеется, и она была написана проф. Г. Михоком и издана в 1954 г.

Мы обратимся теперь к краткой характеристике содержания отдельных глав книги. Глава 6 в значительной степени посвящена изложению теории абстрактного интеграла Лебега; в ней доказаны теоремы Фубини и Лебега—Никодима. В главе 8 доказаны не только основные теоремы о характеристических функциях, но также теоремы Бохнера и Хинчина, дающие различные характеристики этого класса функций, а также теоремы Г. Крамера и Райкова, характеризующие распределения нормальное и Пуассона. Центральная предельная теорема в главе 10 доказана в формулировке Линдеберга; в качестве следствия рассмотрен случай одинаково распределенных слагаемых. Далее приведена общая постановка вопроса (по Хинчину и Феллеру) о сходимости к предельному нормальному закону нормированных сумм, а также доказана теорема С. Н. Бернштейна о том, что независимость величин ξ и η, а также $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ является необходимым и достаточным условием нормальности распределений ξ и η (если ξ и η имеют одно и то же распределение). В теории безгранично делимых распределений (глава 11) дан ряд теорем о таких распределениях, в том числе каноническое представление безгранично делимых характеристических функций, а также теорема П. Леви об условии принадлежности распределения классу L.

В предельных теоремах для цепей Маркова найдены условия сходимости к нормальному закону, результаты Купмана о сходимости к закону Пуассона и результаты Добрушина о предельных распределениях для цепей с двумя состояниями. В главах, посвященных изложению теории случайных процессов, основное место уделено процессам Маркова. Изложены в тексте многие результаты Колмогорова, Феллера, Н. М. Крылова и Боголюбова, Иосида и Какутани, а также Арлея и Фарри, относящиеся к теории радиоактивного распада. Уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова рассмотрены не только в одномерном, но и в многомерном случае.

При изложении элементов статистической механики авторы широко использовали систему построения теории, изложенную в монографиях и статьях Хинчина.

Элементы математической статистики посвящены главным образом решению задачи оценки неизвестных параметров, развитой преимущественно для случаев распределений нормального и Пуассона. Из книги читатель узнает о понятиях достаточной, эффективной и асимптотически эффективной оценок, о необходимых и достаточных статистиках. Эти понятия проиллюстрированы на примере нормального распределения. Задача проверки статистических гипотез намечена лишь бегло и в книге изложены только идеи использования критериев χ^2 и Колмогорова для оценки неизвестного распределения. Четыре главы посвящены приложениям теории вероятностей к изучению демографических явлений. Дано обстоятельное изложение математической теории страхования.

Книга написана хорошим языком. Для лиц, читающих по-французски или итальянски, румынский язык книги не является помехой. Мы можем, таким образом, надеяться, что выход книги трех авторов будет способствовать развитию интереса к теории вероятностей не только среди ее румынских читателей.

Б. В. Гнеденко

Л. Шметтерер, Введение в математическую статистику, 405 стр.+XXII (L. Schmetterer, Einführung in die mathematische Statistik, Wien, Springer—Verlag, 1956).

Среди учебных руководств по математической статистике, рассчитанных на читателей со специальным математическим образованием и вышедших за последние пять

лет, заслуживает внимания книга профессора венского университета Л. Шметтерера.

Книга разбита на семь глав, содержит добавление, именной и предметный указатели, таблицу немецких переводов английских статистических терминов, список основных математических журналов, в которых печатались статьи по теории вероятностей и математической статистике, на которые имеются ссылки в тексте.

О содержании книги до некоторой степени можно судить по наименованиям глав и по числу отведенных на эти главы страниц: гл. 1. Введение в теорию вероятностей (109), гл. 2. Элементарная теория выборок (50), гл. 3. Доверительные области (33), гл. 4. Теория оценки параметров (40), гл. 5. Введение в теорию критериев оценки (45), гл. 6. Теория регрессии и теория выборок из многомерной нормальной совокупности (57); гл. 7. Введение в непараметрические теории (48), Добавление. Классический метод Байеса (11).

Все литературные указания на книги и журнальные статьи даны в подстрочных примечаниях. Эти указания доведены до работ, появившихся в 1954 г. включительно.

Остановимся теперь несколько подробнее на содержании отдельных глав.

Изложение теории вероятностей автор основывает на системе аксиом А. Н. Колмогорова. Эта система аксиом выписывается уже на первых страницах текста. Далее систематически проводится теоретико-множественная концепция. И лишь во введении к книге упоминается о концепции, которая разрабатывалась Р. Мизесом, и приводится таблица статистических наблюдений за появлением чёта и нечёта с 1 по 6 декабря 1956 г. в игорном доме в Зальцбурге. О классическом определении Лапласа читатель может узнать только из заключительного § 43 первой главы, напечатанного мелким шрифтом. Изложение почти совсем не проиллюстрировано примерами и автор основное внимание сосредотачивает на изложении теории случайных величин, как одномерных, так и многомерных. Понятию случайного события в аксиоматике теории вероятностей отведено немногим менее шести страниц.

Некоторый материал, в частности основные теоремы о характеристических функциях, приведен без доказательств, но со строгими формулировками. Нормальному распределению (одномерному и многомерному) уделено специальное внимание. Попутно излагается вывод распределений χ^2, t, F. Дается общее представление о распределениях Пирсона. Теоремы Бернулли и Муавра—Лапласа доказаны только в §§ 33 и 34 первой главы.

Вся вторая глава почти без исключения посвящена изучению выборок из нормально распределенных совокупностей. В конце главы рассматриваются, помимо схемы возвращенного шара, также другие схемы выборок: невозвращенного шара, последовательных выборок.

Третья глава построена главным образом на работах Ю. Неймана. Указываются некоторые достаточные условия для возможности построения доверительных областей по определенным правилам в случае одного неизвестного параметра.

Теория оценки параметров построена весьма удачно, хотя и включает в себя сравнительно ограниченный материал — понятия о статистиках (оценивающих функциях); несмещенных оценках (erwartungstreue Schätzfunktion), достаточных, состоятельных, эффективных и асимптотически эффективных оценках; доказательство неравенства Рао—Крамера; метод максимума правдоподобия. В качестве примеров рассмотрена оценка неизвестного параметра в распределениях Коши и Пуассона.

Теория статистических критериев в значительной степени базируется на работе Ю. Неймана и Э. Пирсона. Вводятся понятия критической области, мощности критерия. Доказывается ряд теорем о выборе критической области и о построении самого мощного критерия.

Регрессионный анализ построен на базе рассмотрения произвольных многомерных распределений, но основные результаты получены для исходных нормальных распределений. В начале главы излагаются элементы метода наименьших квадратов на базе статей Эйткена, А. Н. Колмогорова, В. В. Петрова и др. авторов. Рассматриваются распределения Уисхарта, Гетелинга; вводятся дискриминаторная функция Фишера, расстояние Махалонобиса.

В последней главе дается общее представление о статистических критериях, ос-

нованных на упорядоченных выборках и независящих от исходного распределения. Дается представление о критериях А. Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова, Вилькоксона, критерии симметрии Химерлийка. Значительное место отведено рассмотрению серий. В тексте даны ссылки на многочисленные работы Лемана, Вальда, Реньи и других.

Книга написана исключительно четким, порой даже сухим языком. Чувствуется, что автор сам является математиком теоретико-множественного направления. Рецензируемая книга может быть рекомендована математикам, специализирующимся в области теории вероятностей и статистики. Эта сравнительно небольшая книга может служить хорошим введением в современную монографическую и журнальную статистическую литературу.

Б. В. Гнеденко

Центральная политехническая библиотека

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина, 6. Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal "The Theory of Probability and its Application" accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square, 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Подписано к печати 5/III 1958 г. Формат бумаги $70\times108^{1}/_{16}$. Бум. л. $4^{1}/_{4}$. Печ. л. 10,27
Уч.-изд. 9,8 Тираж 2100 Заказ 58 Т-00098

2-я типография издательства Академии наук СССР. Москва. Шубинский пер., д. 10

N O T I C E

THIS VOLUME IS INCOMPLETE

THE FOLLOWING ISSUES ARE NOT
AVAILABLE:

Vol. 3 No. 2 1938

BINDING UNIT